

Махова Наталья Борисовна, к.т.н., доцент кафедры “Высшая математика,
Российский университет транспорта, г. Москва

Михайлова Валерия Сергеевна, студент, Российский университет
транспорта, г. Москва

Солженицина Софья Константиновна, студент, Российский университет
транспорта, г. Москва

ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Аннотация. В статье рассматривается взаимосвязь различных разделов математики и процесса проектирования современных строительных объектов. Рассмотрены различные типы поверхностей, используемые для создания функциональных и эстетически привлекательных архитектурных форм. Особое внимание уделено основным понятиям математики и их применению для решения практических задач в строительстве, таких как: расчет площадей поверхностей и объемов, определение оптимальных параметров для формообразования. Рассматриваются примеры использования различных геометрических поверхностей: куполов, сводов, оболочек и других нетиповых строительных элементов. Статья призвана стимулировать интерес к изучению математики как необходимого инструмента для успешной профессиональной деятельности.

Annotation. The article discusses the application of geometric methods in the design and construction of modern construction facilities. Special attention is paid to the role of various types of surfaces in creating functional and aesthetically appealing architectural forms. The article introduces students to the basic concepts of mathematics and its application to solve practical problems in construction, such as calculating surface areas and volumes, determining optimal parameters for shaping. Examples of the use of various geometric surfaces are considered: domes, arches, shells and other atypical building elements. The article aims to stimulate

interest in the study of mathematics as a necessary tool for successful professional activity.

Ключевые слова: геометрические тела, оболочки, интегрирование, криволинейные поверхности, автоматизация расчетов, Платоновы тела.

Keywords: geometric bodies, shells, integration, curved surfaces, automation of calculations, Platonic solids.

Здания и сооружения состоят в большинстве своем из геометрических тел. Стоит посмотреть вокруг и можно увидеть сооружения различного назначения в форме: призмы - башня Эволюции (закручивающаяся призма) в Москве; пирамиды - дворец Мира и Согласия в Астане; Платоновых тел - Национальная библиотека в Минске.

В основном все здания и сооружения представляют из себя многогранники, простые или сложные комбинации. Это неудивительно ведь основным элементами строительства являются - балка, колонна, которые как раз и представляют из себя объемные геометрические тела.

Прочность и устойчивость зданий во все времена обеспечивала именно геометрия. В современном мире её правила соединились с потребностью и фантазиями человека. [3]

Современное строительство зданий и сооружений требует оптимизации материалов и конструктивных решений для обеспечения прочности и долговечности конструкций при минимальных затратах ресурсов. Одним из наиболее важных вопросов при этом является проектирование и анализ оболочек зданий, которые могут быть различными: от простых сфер и цилиндров до сложных криволинейных структур.

Применение интегрирования для расчета оболочек зданий позволяет точно определить распределение нагрузок, деформации и напряжения, что важно для разработки безопасных и экономичных конструкций. Геометрия поверхности играет ключевую роль в проектировании таких конструкций, так

как от правильного расчета зависит не только безопасность, но и эффективность использования строительных материалов.

При проектировании оболочек и расчета их геометрии, применяются различные методы, среди которых:

1. Метод интегрирования для расчета напряжений и деформаций — в данном случае геометрия оболочек описывается с помощью дифференциальных уравнений, и расчеты проводятся через интегрирование этих уравнений по поверхности. Этот метод позволяет точно оценить распределение нагрузки и силы в оболочках.
2. Методы конечных элементов (МКЭ) — численные методы, в частности, МКЭ, активно применяются для анализа оболочек с сложной геометрией. С помощью этого метода можно моделировать сложные структуры и точно рассчитывать их поведение под нагрузкой.
3. Классические теории оболочек — такие теории, как теория Ламэ, теория тонких оболочек, теория пластичности и другие, применяются для расчета более простых конструкций, где геометрия и нагрузки можно описать с помощью аналитических решений.
4. Современные компьютерные программы — использование специализированных программных продуктов (например, ANSYS, ABAQUS, COMSOL) для моделирования и расчета оболочек позволяет эффективно решать задачи проектирования и анализа.

Таким образом, интеграция методов математического моделирования и численных расчетов, в том числе с использованием интегрирования для анализа поверхности оболочек зданий, является важным шагом в решении проблем, связанных с безопасностью, экономичностью и долговечностью конструкций.

Одним из наиболее эффективных, прочных и эстетичных способов создания зданий и сооружений являются оболочки. Оболочка здания – это комплекс конструктивных элементов, которые отделяют внутреннее

пространство от внешней среды, обеспечивая защиту от воздействий природы и создавая комфортные условия для людей.

Типы оболочек разделяются в зависимости от способа формирования поверхностей на:

Оболочки вращения - при вращении кривой, прямой или ломанной вокруг неподвижной вертикальной или горизонтальной оси, находящейся с ней в одной плоскости (купола или цилиндрические оболочки соответственно).

Оболочки переноса - при непрерывном перемещении образующей в виде кривой или прямой линии вдоль криволинейной направляющей.

Наиболее распространенные оболочки: цилиндрические, купола, оболочки положительной / отрицательной Гауссовской кривизны.

Выбор типа оболочки здания зависит от множества факторов, включая климатические условия, архитектурный стиль, бюджет, доступность материалов и экологические требования.

Криволинейная поверхность оболочки – поверхность, в любой точке которой содержатся взаимно перпендикулярные кривые, каждая из которых имеет наибольший и наименьший радиусы кривизны. А произведение соответствующих радиусов кривизны называется Гауссовской кривизной:

$$K = k_1 * k_2$$

С помощью Гауссовской кривизны можно определить поведение поверхности под той, или иной нагрузкой. Так в зависимости от значения Гауссовской кривизны (ГК) оболочки делят:

1. Нулевая ГК – цилиндрические и конические поверхности.
2. Отрицательная ГК – гиперболические параболоиды (искривление в две стороны).
3. Положительная ГК – сферические и эллипсоидальные поверхности (искривление в одну сторону).

Высокая величина (как положительная, так и отрицательная) Гауссовской кривизны обычно указывает на более высокую устойчивость к деформациям и разрушениям.

Криволинейные поверхности характеризуются в основном по четырем направлениям:

- Кривизна – помогает эффективно распределять нагрузку по поверхности.
- Тонкость – толщина оболочки значительно меньше, в сравнении с ее другими габаритными размерами.
- Материал – выбор материала зависит от конструкции, предполагаемой нагрузки и эстетических требований.
- Геометрия - то есть, форма оболочки позволяет минимизировать изгибающие моменты и использовать материал более эффективно.

Ярким примером применения криволинейных поверхностей является Административно-девелоперский центр в микрорайоне «Балтийская жемчужина» в Санкт-Петербурге.

Как было отмечено ранее, балка – один из основных элементов конструкции. Чтобы определить прогибы и углы поворота заданного сечения, используют интегральное исчисление, а именно интеграл Мора:

$$\bar{P}_K \Delta_{KP} = \int_0^l M_{xP} \left(\frac{\bar{M}_x}{EI_x} dz \right) + \int_0^l k Q_{yP} \left(\frac{\bar{Q}_y}{GF} dz \right)$$

Порядок вычисления интеграла Мора:

1. Определяется перемещение в точке.
2. Подсчет изгибающих моментов на каждом участке балки.
3. Вычисляем интеграл Мора для всей балки.
4. Определяем знак.

Знак «+» - направление совпадает с направлением единичного усилия, знак «-» - действительное направление искомого перемещения противоположно направлению единичному усилию. [6]

При непосредственных расчетах криволинейных поверхностей используют двойные интегралы. Двойной интеграл используется для вычисления площади поверхности, ограниченной кривыми линиями. В случае криволинейных поверхностей двойной интеграл применяется несколько иначе - для нахождения площади самой поверхности.

Пусть у нас есть поверхность, заданная уравнением $z = f(x, y)$, где (x, y) принадлежат области D на плоскости xy . Тогда площадь этой поверхности S выражается через двойной интеграл следующим образом:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ и $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ - частные производные функции $f(x, y)$.

Шаги решения задачи:

1. Найти частные производные функции $z = f(x, y)$. Для этого нужно взять частную производную по переменной x , считая y константой, и наоборот.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

2. Подставить эти производные в формулу двойного интеграла.
3. Определить область интегрирования D . Это область на плоскости xy , над которой задана функция z .
4. Вычислить сам интеграл, используя стандартные методы вычисления двойных интегралов (например, разбиение на элементарные прямоугольники).

Расчет поверхностей зданий необходим для определения материалов, стоимости, теплотехнических характеристик и визуализации проектов.

Существуют специализированные программы, которые автоматизируют эти расчеты. Самые популярные из них: AutoCAD, Revit, ArchiCAD, SketchUp, Renga Architecture.

Рассмотрим подробнее наиболее известную программу AutoCAD. Эта программа пользуется спросом, так как у нее высокая точность чертежей, возможность работы с разными видами графики, включая 2D и 3D модели, также AutoCAD соответствует международным стандартам проектирования (ISO и ГОСТ). Также данная программа совместима с другими программами.

Студенты строительных специальностей изучают решение задач в проекциях с числовыми отметками, включая определение границ земляных работ. Для этого используется система AutoCAD, где алгоритм включает задание горизонталей топографической поверхности, присвоение высот, создание линий контура площадки и кромки дороги, преобразование их в плоскости и построение откосов насыпи и выемки. [2,4]

Сейчас в строительстве применяют перекрестно-стержневые пространственные конструкции. Этот метод позволяет сделать конструкцию более устойчивой, приспособленной к сейсмическим движениям, повысить мобильность внутренних опор, увеличить жесткость системы, сооружать практически любые формы конструкций.

При разработке данного метода в основы были взяты так называемые правильные многогранники, то есть Платоновы тела. Правильные многогранники играют ключевую роль в строительстве из-за очень важного свойства - плотное заполнение пространства и единого длинного модульного стержня в конструкции. [5]

Ярким примером надежности такой конструкции является ЧП на Саяно-Шушенской ГЭС. Именно благодаря использованию платоновых тел и перекрестно-стержневой конструкции удалось не допустить полного разрушения машинного зала. Также удалось в кратчайшие сроки восстановить сооружение.

Таким образом, каждая криволинейная оболочка состоит из множества простых геометрических фигур, следовательно геометрия лежит в основе

всего строительства. Форма оболочки позволяет рационально использовать материалы. Для определения прогибов и углов поворота заданной формы, используют интегральное исчисление, а именно интеграл Мора. При непосредственных расчетах криволинейных поверхностей используют двойные интегралы. Двойной интеграл используется для вычисления площади поверхности, ограниченной кривыми линиями. Современное программное обеспечение значительно упрощает процесс проектирования и анализа сложных поверхностей. [1]

Список литературы

1. Михайловский И. Б. Теория классических архитектурных форм. Изд. Архитектуры СССР, 2006 г. 288 с. URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_005354165/ (Дата обращения: 28.03.2025)
2. Статья: «Геометрическое моделирование оболочек с применением подсистем AutoCAD» URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/15726> (Дата обращения: 26.03.2025)
3. Статья: «Геометрия - Основа строительства» URL: <https://shdevrum.ai/post/aea902addacb11ee8189f6f8c1ba65ae/> (Дата обращения: 26.03.2025)
4. Статья: «Обзор популярных систем автоматизированного проектирования (CAD)» URL: <https://www.pointcad.ru/novosti/obzor-sistem-avtomatizirovannogo-proektirovaniya> (Дата обращения: 27.03.2025)
5. Статья: «Платоновы тела и применение в строительстве» URL: <https://videouroki.net/razrabotki/platonovy-tiela-i-primienieniie-v-stroitielstvie.html> (Дата обращения: 27.03.2025)
6. М-54 Методы решения задач по векторному анализу и поверхностным интегралам. Составители: Калашников А.Л., Фокина В.Н., Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 38 с URL: http://www.unn.ru/books/met_files/alkvekt.pdf (Дата обращения: 29.03.2025)

References

1. Mikhalovsky I. B. Theory of classical architectural forms. Ed. Architecture of the USSR, 2006. 288 p. URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_005354165/ (Date of request: 28.03.2025)
2. Article: "Geometric modeling of shells using AutoCAD subsystems" URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/15726> (Date of request: 26.03.2025)
3. Article: "Geometry is the basis of construction" URL: <https://shdevrum.ai/post/aea902addacb11ee8189f6f8c1ba65ae/> (Date of request: 26.03.2025)
4. Article: "Overview of popular computer-aided design (CAD) systems" URL: <https://www.pointcad.ru/novosti/obzor-sistem-avtomatizirovannogo-proektirovaniya> (Date of request: 27.03.2025)
5. Article: "Platonic solids and their application in construction" URL: <https://videouroki.net/razrabotki/platonovy-tiela-i-primieneniie-v-stroitelstvie.html> (Date of request: 27.03.2025)
6. M-54 Methods for solving problems in vector analysis and surface integrals. Compiled by: Kalashnikov A.L., Fokina V.N., Textbook. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 2016. 38 pages URL: http://www.unn.ru/books/met_files/alkvekt.pdf (Date of request: 29.03.2025)