

УДК 330.4.

Сопкинов Андрей Михайлович, магистрант, Иркутский национальный
исследовательский технический университет, г. Иркутск

**ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛИ «СОЛОУ» С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ В
МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ**

Аннотация. Статья посвящена исследованию возможности применения модели экономического роста «Солоу» с производственной функцией для моделирования производственного процесса на предприятиях промышленного комплекса. Рассмотрены аспекты моделирования производственного процесса на промышленных предприятиях – стратегии и концепции применения математических моделей. Рассмотрена возможность применения макроэкономической модели на микроуровне, а также производственной функции для анализа и моделирования производственных процессов. В статье выделены примеры адаптации математических моделей и производственных функций для моделирования производственных процессов. Описаны перспективы дальнейших решений по теме исследования.

Annotation. The article is devoted to the study of the possibility of using the Solow economic growth model with a production function to model the production process at industrial enterprises. The aspects of modeling the production process in industrial enterprises – strategies and concepts of using mathematical models are considered. The possibility of applying a macroeconomic model at the micro level, as well as a production function for the analysis and modeling of production processes, is considered. The article highlights examples of the adaptation of mathematical models and production functions for modeling production processes. The prospects of further decisions on the research topic are described.

Ключевые слова: модель «Солоу», производственная функция, моделирование, статистическое моделирование, имитационное моделирование, производственный процесс.

Keywords: Solow model, production function, modeling, statistical modeling, simulation modeling, production process.

Введение

Промышленность является одной из главных экономикообразующих отраслей страны в целом. Данный сегмент экономики, представляющий собой совокупность числа самостоятельных предприятий, цехов и производств, направленных на добычу, заготовку и переработку сырья в готовую продукцию или услугу, оказывает большое влияние на экономическое развития страны.

Появление новых технологий и разработок для регулирования сложных производственных процессов позволяет упростить сам технологический процесс, что в свою очередь снижает трудозатраты и обеспечивает высокую эффективность работы предприятия, предоставляя возможность принять оптимальные решения для максимизации эффективности производства с минимальной себестоимостью. Таким решением может являться моделирование производственных процессов.

Моделирование производственных процессов происходит различными методами, которые, в свою очередь, подразделяются на методы аналитического и имитационного моделирования. Аналитическое моделирование требует абстрагирования от конкретной природы явлений. Часто данного типа модели проще и удобнее исследовать, они позволяют проводить вычислительные эксперименты, реальная постановка которых затруднена или может дать непредсказуемый результат [1]. При этом имитационное моделирование является более оптимальным, так как является более комплексным. Имитационное моделирование — метод, позволяющий строить модели, описывающие процессы так, как они проходили бы в действительности. Такую модель можно «проиграть» во времени как для одного испытания, так и заданного их множества. При этом результаты будут определяться случайным характером процессов [2].

На данном этапе развития науки существует тенденция применения математических моделей в самых разных сферах экономики. Ключевая цель их использования заключается в оптимизации управления, то есть выявления набора управляющих воздействий, при которых достигается наилучший результат работы (его оценка осуществляется в соответствии с определенным заданным критерием). Большое количество проведенных исследований математических моделей позволило выделить наиболее типичные задачи и, соответственно, разработать методику их решения.

Модель «Солоу», разработанная в рамках неоклассической теории экономического роста с использованием производственной функции «Кобба-Дугласа», позволит решить задачу нахождения научно обоснованных решений для эффективного функционирования предприятия. Построение данной математической модели, описывающей производственный процесс, находящийся под воздействием широко спектра случайных воздействий, поможет более точно оценить работу и принять оптимальные решения для эффективной работы предприятия.

В настоящем исследовании описываются перспективы возможности модели экономического роста «Солоу» с использованием производственной функции, в форме функции «Кобба-Дугласа» для моделирования производственных процессов.

Материалы и методы

Модель экономического роста «Солоу» является одним из канонических методов исследования макросистемных моделей пространственной экономики в количественном выражении. Ключевая же задача производственной функции заключается в объяснении повышения благополучия общества в процессе выпуска товаров и услуг.

Для начала рассмотрим модель «Солоу» на макроуровне, затем - на микроуровне.

Содержательно модель «Солоу» рассматривает экономику системы (или подсистемы) в виде замкнутого единого неструктурированного целого, в котором осуществляется производство одного универсального продукта. Этот продукт может как потребляться, так и инвестироваться. В данной модели предполагается рассмотрение пяти макроэкономических показателей (переменных эндогенного типа):

- Y – ВВП (или валовой региональный продукт (ВРП) в случае исследования экономики отдельного региона);
- I – валовые инвестиции;
- C – фонд потребления;
- K – основные производственные фонды;
- L – количество занятых в сфере производства.

Следует отметить, что первые три из указанных показателей (Y , I , C) относятся к потоковому типу (это означает, что происходит накопление их значений в течение года), а оставшиеся две переменные (K , L) являются мгновенными (существует возможность определения их значений в произвольный момент непрерывного времени). Показатели «капитал» и «труд», выраженные через переменные (K , L), являются независимыми. Соответственно данные переменные можно описать и адаптировать под любой процесс или систему.

В одном из исследований была предложена модель роста лесных насаждений, которая была основана на модели экономического роста Р. Солоу [3]. Переменные, введенные в модель, это «капитал» (K) (фитомасса несинтезирующих древесных компонентов в насаждении — ствол, корни и ветви) и «труд» (L) (фитомасса фотосинтезирующих древесных компонентов в насаждении — листья или иглы). Фитомасса корней рассчитывалась с помощью специальной независимой модели, а процесс производства энергии

деревьями был описан через уравнение «Кобба-Дугласа». Данный подход был использован для описания процессов роста в лесных насаждениях, состоящих из различных видов в Сибири, и возрастной динамики чистой первичной продукции. Адаптированная модель Р. Солоу могла объяснить ряд эффектов (таких как гибель лесного насаждения после того, как иглы были съедены дефолирующими насекомыми), которые не могут быть объяснены стандартными логистическими моделями.

Если математическая модель рассматривает в общем систему, то через производственные функции можно описать сам процесс производства.

Производственная функция – это статистически значимая связь (технологическая связь) между совокупным выпуском (доходом) и объемами используемых ресурсов [4].

Существует два вида производственных функций:

- однофакторные. В этих функциях осуществляется установка зависимости объема производства от одного фактора. Среди таких функций можно выделить линейную, степенную, параболическую и показательную;
- двухфакторные. В таких функциях осуществляется установка зависимости объема производства от соотношения двух факторов. Среди подобных функций выделяют: функции «Кобба-Дугласа», «Солоу», «Аллена», «Леонтьева».

Ключевыми факторами производства в данном случае являются труд и капитал. Благодаря определенной пропорциональности их сочетания возникают условия для получения продукта. Следовательно, основной задачей производственной функции «Кобба-Дугласа» можно считать отражение технологического соотношения между объемами труда и капитала, которое требуется для производства того или иного товара в необходимом количестве [6].

Как уже отмечалось, данная производственная функция относится к двухфакторным. Впервые она была предложена шведским экономистом Кнутом Векселлем, однако ее статистическая проверка была осуществлена двумя учеными, Чарльзом Коббом и Полом Дугласом в течение временного интервала 1927-1947 гг. (1928 год ознаменовался выходом их работы, имевшей название «Теория производства»). По фамилиям этих ученых функция и была названа.

Следует отметить, что в узком смысле термин «производственная функция Кобба-Дугласа» используется для обозначения постоянной отдачи от масштаба.

Производственную функцию, внедренную Коббом и Дугласом, можно считать первой функцией агрегированного производства. Благодаря ее применению появилась возможность осуществления моделирования не только процессов мелкого масштаба, но и целых экономических отраслей. Статистическое подтверждение этой функции представляет собой новый этап макроэкономического развития, который позволяет получить оценку эффективности производства на уровне национального или регионального хозяйства.

В научной статье «Применение производственной функции Кобба-Дугласа для анализа промышленного региона» описано, что до сих пор адекватным методом, позволяющим достаточно точно оценивать производственные возможности промышленного комплекса страны или ее региона, остается производственная функция Кобба — Дугласа [5]. В рамках исследования авторы отвечают на вопрос о возможности построения адекватной производственной функции Кобба — Дугласа со статическими параметрами и возможности построения адекватной производственной функции Кобба — Дугласа с динамическими параметрами на примере промышленного комплекса Республики Башкортостан за 2006–2016 гг. Для

оценки производственных возможностей на макро- мезо- и микроуровне применяется производственная функция Кобба — Дугласа.

Производственная функция «Кобба-Дугласа» фактически определяет зависимость объема производства определенного товара от сочетания пары факторов, относящихся к производству, – капитала и труда. В общем случае выражение имеет вид (1):

$$Q = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} \quad (1)$$

где Q – это показатель объема производства, который отражает действительную стоимость товаров и услуг, произведенный в заданный временной интервал;

A – является общим показателем продуктивности факторов с технологической точки зрения. Данный параметр можно отнести к наиболее тяжелым для определения. Он характеризует с заданным уровнем погрешности возможность несовершенства оценки вклада, капитала и труда, а также влияния, оказываемого другими факторами;

K – объем затрат вложенного капитала в производство определенного объема продукции. Данный показатель отражает действительную (реальную) стоимость оборудования и машин, которые задействуются в производстве;

L – объем затрат труда в производстве определенного объема продукции. Данный показатель отражает число человеко-часов, отработанных всеми работниками за заданный временной интервал;

α – коэффициент технологической эластичности труда;

β – коэффициент технологической эластичности капитала.

В рассматриваемой задаче составляется модель «Солоу». Она представляет собой односекторную макроэкономическую модель экономического роста. Как уже говорилось выше, экономическая система выполняет производство одного продукта, который и потребляется, и

инвестируется. Благодаря данной модели появляется возможность довольно точного и детального описания определенной специфики процессов макроэкономики.

В модели «Солоу» для задания состояния экономики задействуют пять эндогенных переменных, изменяющих свои значения с течением времени:

- L – количество занятых (характеристика труда);
- K – основные производственные фонды (характеристика капитала);
- X – объем выпуска или валовой внутренний продукт (ВВП). Именно этот показатель задается в виде производственной функции $X = F(K, L)$. В данном случае целесообразно применить производственную функцию «Кобба-Дугласа» $X = K^\beta \cdot L^{1-\beta}$ (например, функция может иметь следующий вид: $X = K^{0,3} \cdot L^{0,7}$);
- C – объем потребления;
- I – объем инвестиций.

Соответственно в качестве служебных параметров выступают:

- β – коэффициент эластичности по капиталу (доля капитала в общем объеме совокупного продукта, то есть ВВП);
- $1 - \beta$ – коэффициент эластичности по труду (доля труда в общем объеме совокупного продукта).

Кроме этого, разрабатываемая модель использует ряд показателей экзогенного типа (с течением времени их значения остаются постоянными):

- μ – доля производственных фондов, которые выбыли за год. Другими словами, это норма выбытия капитала;
- ν – темп прироста занятых работников (годовой);

- ρ – норма накопления, то есть доля инвестиций, либо норма сбережения.

Безусловно, существует связь между инвестициями I и выпуском X . Она выражается соотношением (2):

$$I = \rho \cdot X \quad (2)$$

Необходимо учесть, что существует распределение дохода от выпуска на потребление и инвестиции (сбережениями), выражающееся в соответствии (3):

$$X = C + I \quad (3)$$

Кроме этого, темп роста количества занятых L представляет собой постоянную величину ν , то есть справедливым является выражение (4):

$$L = L_0 \cdot e^{\nu \cdot t} \quad (4)$$

Теперь появляется возможность составления системы уравнений (5), которая осуществляет описание модели «Солоу» в абсолютных показателях:

$$\left\{ \begin{array}{l} L = L_0 \cdot e^{\nu \cdot t} \\ \frac{dK}{dt} = -\mu \cdot K + I \\ K(0) = K_0 \\ I = \rho \cdot X \\ X = I + C \\ X = F(K, L) \end{array} \right. \quad (5)$$

Целесообразна модификация уравнений системы (5) в выражения, использующих относительные показатели. Для этого осуществляется нормирование всех уравнений системы величиной труда L . Преобразованная система уравнений имеет вид (6):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dk}{dt} = -(\mu + v) \cdot k + \rho \cdot x = -\lambda \cdot k + \rho \cdot x \\ \lambda = \mu + v \\ k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0} \\ i = \rho \cdot x = \rho \cdot f(k) \\ x = i + c \\ x = f(k) \end{array} \right. \quad (6)$$

Последнее уравнение системы (6) может быть записано, в частности, с помощью производственной функции «Кобба-Дугласа» (7):

$$x = \frac{X}{L} = \frac{K^\beta \cdot L^{1-\beta}}{L} = \frac{K^\beta}{L^\beta} = k^\beta \quad (7)$$

Например, может быть следующая функция: $x = k^\beta$.

Кроме этого, в системе уравнений (6) используются следующие обозначения:

- $i = \frac{I}{L}$ – объем удельных инвестиций;
- $x = \frac{X}{L}$ – объем удельного продукта (характеристика производительности труда);
- $k = \frac{K}{L}$ – представляет собой объем удельного капитала (удельную фондовооруженность);
- $c = \frac{C}{L}$ – является объемом удельного потребления;
- λ – коэффициент, характеризующий норму потребления;
- ρ – коэффициент, характеризующий норму накопления.

В исследовании “Возможности применения модели Солоу на микроуровне”, были рассмотрены основные параметры модели Р. Солоу и их интерпретация в рамках предприятия [7]. Внесены предложения по дополнению модели Р. Солоу с тем, чтобы повысить адекватность модели

реальным условиям существования фирм. Авторы рассмотрели факторы модели «Солоу» и их возможную интерпретацию на микроуровне. Первым фактором являлся масштаб сбережений. Необходимо выделить, какой из трёх вида фондов относился бы к сбережениям на предприятии: фонд возмещения, фонд накопления и фонд потребления. Им оказался фонд накопления, а также амортизационный фонд, только в том случае, если он тратится на инвестиционные цели. Что же до остальных фондов: фонд потребления на микроуровне будет являться частью чистой прибыли, направляемой для удовлетворения собственных производственных и внепроизводственных потребностей, а фонд возмещения на микроуровне будет частью денежных средств предприятия, идущих на покрытие затрат на простое воспроизводство и начисление износа. В конце исследования, авторы предположили, что модель «Солоу» может быть применена на микроуровне с определенными ограничениями. В первую очередь, ограничения касаются вида предприятия, на котором возможно применение модели «Солоу». К таким предприятиям относятся предприятия в форме рабочей акционерной собственности и предприятие государственной формы собственности в тех странах, где государственная собственность отождествляется с народной собственностью. В общем и целом, если рассматривать возможную перспективу развития общества в направлении коммунизма, то вполне возможно возрастание актуальности применения модели «Солоу» на микроуровне. Авторы также оценили применение модели «Солоу» на уровне предприятия при условии, что предприятие готово приложить усилия в плане качественного объективного анализа своей деятельности и существующих взаимосвязей с целью создания поправочных коэффициентов, отражающих реальную эффективность факторов, предложенных моделью, в рамках данного предприятия.

Результаты и перспективы развития

В целом, модель «Солоу» с производственной функцией «Кобба-Дугласа» можно применить на микроуровне и смоделировать производственный процесс на предприятии. На это есть несколько причин:

- Рассмотрена статья, где модель «Солоу» применялась не совсем в стандартной для нее теме исследования: моделирование производственных процессов лесных насаждений [3]. Так как в модели «Солоу» имеется два независимых показателя: «капитал» и «труд», выраженные через переменные (K , L). Данные переменные позволили адаптировать модель «Солоу» для моделирования производственных процессов и построить модель роста лесных насаждений. Через производственную функцию «Кобба-Дугласа» описан процесс производства энергии деревьями;
- Рассмотрена статья, посвященная рассмотрению вопроса о возможности применения модели Р. Солоу на микроуровне [7]. Применение модели «Солоу» возможно на уровне предприятия (микроуровне), при условии, что предприятие готово приложить усилия в плане качественного объективного анализа своей деятельности и существующих взаимосвязей с целью создания поправочных коэффициентов, отражающих реальную эффективность факторов, предложенных моделью.

Таким образом, возможность применения модели экономического роста «Солоу» с использованием производственной функции «Кобба-Дугласа» для моделирования производственных процессов является обоснованным на микроуровне в рамках деятельности и поставленных задач предприятий промышленного комплекса.

В перспективе, использование модели «Солоу» с производственной функцией «Кобба-Дугласа» может быть расширено для охвата других аспектов деятельности предприятия различных комплексов, например: применение

производственной функции для анализа промышленного комплекса, применение производственной функции в плане оптимального производства, применение производной производственной функции в информационной системе.

Заключение

Применение математических моделей для моделирования производственных процессов на предприятиях промышленного комплекса представляется актуальным, так как проведение модели поведения при оптимизации работы технологического оборудования будет гораздо эффективнее, чем вмешиваться в текущий производственный процесс. На сегодняшний день имеется большое количество математических моделей, которые имеют как преимущества, так и недостатки. Интеграция результативных решений в моделировании производственных процессов является необходимым шагом для повышения производительности, обеспечения эффективной деятельности и конкурентоспособности рассматриваемого предприятия.

Список литературы

1. Язов Ю.К. Моделирование процессов непосредственного проникновения в операционную среду компьютера: учеб. пособие / Ю.К. Язов, Н.М. Радько, А.Ф. Мешкова. – Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2007. – 146 с.
2. Основы математического моделирования: учебное пособие / С.В. Звонарев. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2019. — 112 с.
3. Soukhovolsky, V.; Ivanova, Y. Modeling Production Processes in Forest Stands: An Adaptation of the Solow Growth Model. Forests 2018, 9, 391. <https://doi.org/10.3390/f9070391>

4. Hassani, Ashkan, "Applications of Cobb-Douglas Production Function in Construction Time-Cost Analysis" (2012). Construction Systems -- Dissertations & Theses. 13.
<https://digitalcommons.unl.edu/constructiondiss/13>
5. Суворов Николай Владимирович, Ахунов Рустем Ринатович, Губарев Роман Владимирович, Дзюба Евгений Иванович, Файзуллин Фаниль Саитович Применение производственной функции Кобба - Дугласа для анализа промышленного комплекса региона // Экономика региона. 2020. №1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primeneniye-proizvodstvennoy-funktsii-kobba-duglasa-dlya-analiza-promyshlennogo-kompleksa-regiona> (дата обращения: 18.05.2025).
6. Аширбаев, Б.Ы. Производственная функция Кобба-Дугласа и его применение в исследовании макроэкономики / Б.Ы. Аширбаев, Э.Ж. Касымбекова // Современные проблемы механики. – 2020. – № 42 (4). – С. 3-8.
7. Хасанова Анастасия Александровна, Капогузов Евгений Алексеевич Возможности применения модели Солоу на микроуровне // Вестник ОмГУ. Серия: Экономика. 2010. №2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vozmozhnosti-primeneniya-modeli-solou-na-mikrourovne> (дата обращения: 18.05.2025).

References

1. Yazov Yu.K., Radko N.M., Meshkova A.F. Modeling the processes of direct penetration into the computer's operating environment: study guide. – Voronezh: Voronezh State Technical University, 2007. – 146 p.
2. Zvonarev S.V. Fundamentals of mathematical modeling: study guide. – Yekaterinburg: Ural University Press, 2019. – 112 p.
3. Soukhovolsky V., Ivanova Y. Modeling Production Processes in Forest Stands: An Adaptation of the Solow Growth Model // Forests. – 2018. – Vol. 9. – Art. 391. – DOI: 10.3390/f9070391

4. Hassani A. Applications of Cobb-Douglas Production Function in Construction Time-Cost Analysis: dissertation. – University of Nebraska-Lincoln, 2012. – <https://digitalcommons.unl.edu/constructiondiss/13>
5. Suvorov N.V., Akhunov R.R., Gubarev R.V., Dzyuba E.I., Fayzullin F.S. Application of the Cobb-Douglas production function for the analysis of the regional industrial complex // Economy of Region. – 2020. – No. 1. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-proizvodstvennoy-funktsii-kobba-duglasa-dlya-analiza-promyshlennogo-kompleksa-regiona> (accessed: 18.05.2025).
6. Ashirbaev B.Y., Kasymbekova E.Zh. The Cobb-Douglas production function and its application in macroeconomic research // Modern Problems of Mechanics. – 2020. – Vol. 42, No. 4. – P. 3-8.
7. Khasanova A.A., Kapoguzov E.A. Possibilities of applying the Solow model at the micro level // Bulletin of Omsk State University. Series: Economics. – 2010. – No. 2. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vozmozhnosti-primeneniya-modeli-solou-na-mikrourovne> (accessed: 18.05.2025).