Маклаков Владимир Петрович
доцент,
Брянский государственный технический университет,
Россия, г. Брянск

Артемов Иван Сергеевич
студент,
Брянский государственный технический университет,
Россия, г. Брянск

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В RLC-ЦЕПЯХ

Статья посвящена сравнению методов моделирования переходных процессов в RLC-цепях. В работе рассматриваются методы Эйлера, Рунге-Кутты 4-го порядка, их точность и вычислительная сложность. Моделирование необходимо для оптимизации в проектировании устройств (фильтров, импульсных источников питания). На примере RLC-цепи показано, как выбор метода влияет на погрешность относительно аналитического решения и почему метод Рунге-Кутты 4-го порядка является в большинстве случаев самым оптимальным для решения практических задач. Также были получены графики, показывающие примеры типов переходного процесса, и составлена электрическая RLC-цепь.

Ключевые слова: переходные процессы, математическое моделирование, устойчивость алгоритмов, дифференциальные уравнения.

The article is devoted to the comparison of transient simulation methods in RLC circuits. The paper considers the Euler and Runge-Kutta methods of the 4th order, their accuracy and computational complexity. Modeling is necessary for optimization in the design of devices (filters, switching power supplies). Using the example of the RLC circuit, it is shown how the choice of method affects the error relative to the analytical solution and why the Runge-Kutta method of the 4th order is in most cases the most optimal for solving practical problems. Graphs showing examples of transition process types were also obtained, and an electrical RLC circuit was compiled.

Keywords: transients, mathematical modeling, algorithm stability, differential equations.

ВВЕДЕНИЕ

Переходные процессы в электрических RLC-цепях, содержащих резистивные, индуктивные и ёмкостные элементы, представляют собой важный класс задач, возникающих при анализе динамике электронных устройств. Данные процессы сопровождаются сложными явлениями и требуют точного моделирования для корректной работы. В тех условиях, когда аналитическое решение возможно только для простейших случаев, численные методы математического моделирования могут оказаться гораздо точнее и надёжнее в применении. Практическая часть включает в себя математическую реализацию алгоритмов и сравнение результатов. Цель работы заключается в выявлении наиболее оптимальных подходов к выбору методов математического моделирования.

ФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Переходные процессы возникают в электрических цепях при любом изменении режима работы: коммутационные явления, изменение параметров цепи, а также воздействие импульсных сигналов.

Физическая природа обусловлена ограничениями элементов цепи:

1. Для индуктивностей – невозможность мгновенного изменения тока (для этого требуется бесконечная мощность);
2. Для ёмкостей – невозможность мгновенного изменения напряжения (для этого требуется бесконечный ток).

При этом следует, что есть чёткая связь между физической природой переходных процессов и их математическим описанием, которая прослеживается в основных физических законах, связанных с индуктивностью и ёмкостью:

1. Закон Фарадея (электромагнитной индукции) для индуктивностей:

$$E_L = -L\frac{di}{dt}$$

2. Закон сохранения электрического заряда для ёмкостей:

$$i_C = C\frac{du}{dt}$$

Конденсатор, как и индуктивность, влияет на динамику переходных процессов. Однако, если индуктивность противодействует изменению тока, то конденсатор противодействует изменению напряжения. Это явление обуславливает наличие «памяти» в системе: конденсатор накапливает заряд и способен отпускать его, поддерживая колебания или создавая переходный процесс.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДЛЯ RLC-ЦЕПИ

Для RLC-цепи математическое описание заключается в интеграции физических свойств каждого из элементов в одно дифференциальное уравнение.

Была составлена электрическая RLC-цепь, представленная на рисунке 1.

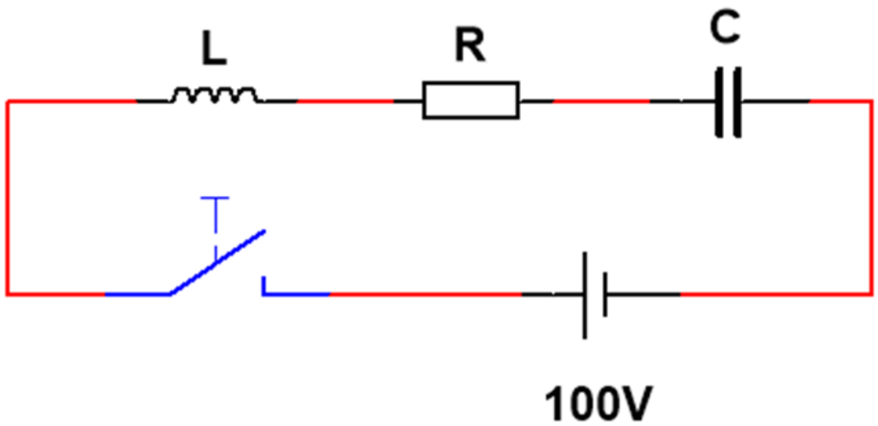

Рисунок 1. RLC-цепь

Для начала находится напряжение в цепи по 2 закону Кирхгофа:

$$U_R + U_L + U_C = U$$

По основным законам находятся значения для напряжений:

1. По закону Ома для сопротивления:

$$U_R = Ri(t)$$

2. По закону Фарадея для индуктивности:

$$U_L = L\frac{di(t)}{dt}$$

3. Напряжение для конденсатора:

$$U_{\text{C}} = \frac{1}{C}\int i(t)dt + U_C(0)$$

После этого подставляем значения выражений в уравнение для напряжений:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = 0$$

Для дальнейшего анализа рассматриваем производные от тока относительно времени, тем самым убирая интегралы. Дифференцируем уравнение по времени и получаем уравнение 2 порядка:

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0$$

Решение этого уравнения зависит от значений параметров R_R, L_L и C_C, и может быть классифицировано в зависимости от типа переходного процесса.

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Решение дифференциального уравнения второго порядка зависит от характеристик корней характеристического уравнения:

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$$

Корни этого уравнения определяют тип переходного процесса. Всего возможно три случая:

1. Незатухающие синусоидальные колебания:

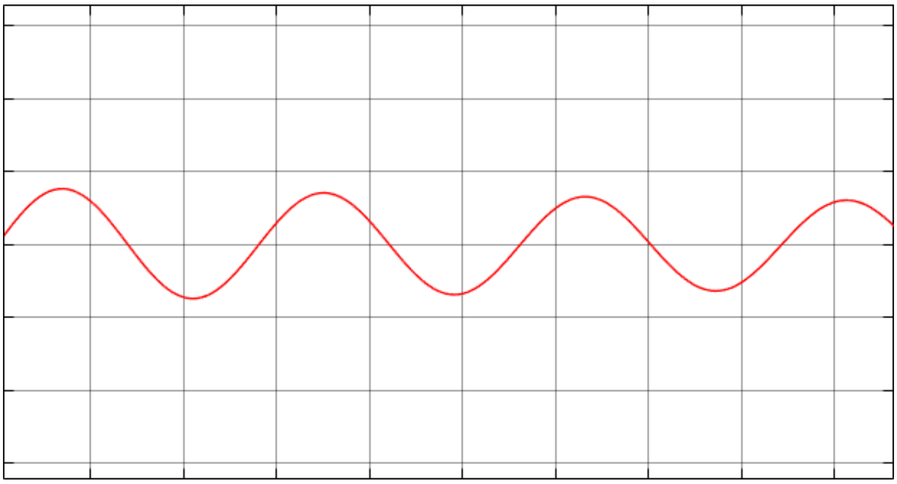

Рисунок 2. Пример незатухающего синусоидального колебания

2. Критическое затухание – ожидается R больше критического значения:

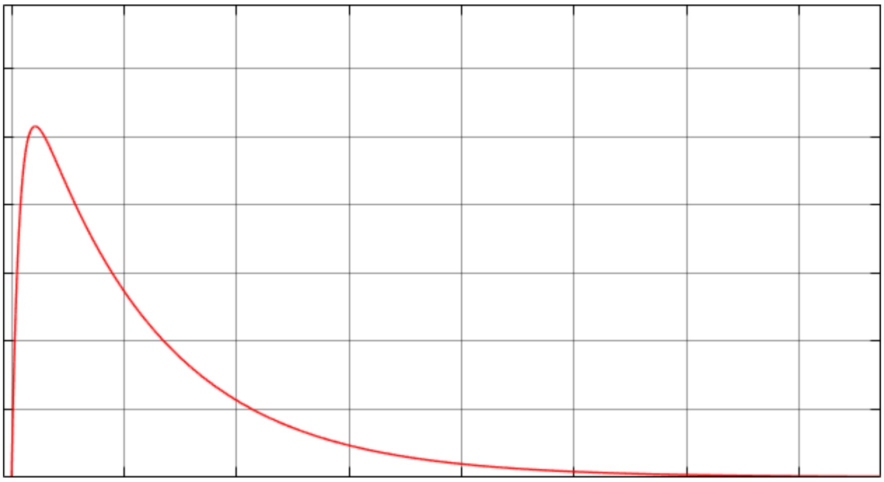

Рисунок 3. Пример критического затухания

3. Колебательное затухание – ожидается R > 0, но $R < R_{крит.}$:

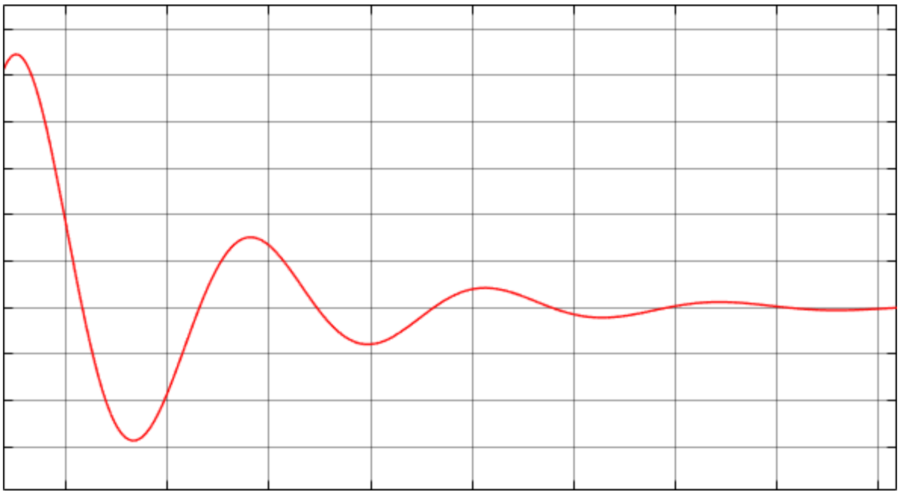

Рисунок 4. Пример колебательного затухания

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Одними из самых распространённых методов моделирования являются Эйлера и Рунге-Кутты 4-го порядка.

Принцип метода Эйлера заключается в приближённой замене интегральной кривой кусочно-линейной функцией (ломаной Эйлера). В большинстве случаев его используют для решения простых дифференциальных уравнений, для RLC-цепи требует малого шага:

$$h < \frac{2L}{R}$$

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка основан на аппроксимации производной функции в четырёх точках интервала интегрирования. Затем используются полученные значения для вычисления следующего значения функции. Этот метод применяется в том случае, когда аналитическое решение сложно найти.

Важно понимать, что успех вычисления любым из приведённых методов зависит от h – чем меньше шаг, тем точнее будет результат. Однако для более малого шага может потребоваться больше вычислений и времени.

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ НА ПРИМЕРЕ RLC-ЦЕПИ

Используем для примера следующие параметры цепи: R = 1Ом; L = 1Гн; C = 1Ф; U = 1В. В зависимости от этого ступенчатое воздействие будет по-разному влиять на RLC-цепь, при этом вызывая переходный процесс, во время которого напряжение на элементах цепи изменяется по экспоненциальному закону.

Аналитически можно найти решение для тока:

$$i(t) = e^{-0.5t}\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Таблица 1. **Результаты применения методов**

Метод	Шаг	Устойчивость	Погрешность
Эйлера	0.1	Устойчив	$\approx 10^{-2}$
Эйлера	0.5	Не устойчив (расходится)	–
Рунге-Кутты 4-го порядка	0.1	Устойчив	$\approx 10^{-6}$
Рунге-Кутты 4-го порядка	0.5	Устойчив	$\approx 10^{-4}$

ВЫВОД

Благодаря математическому моделированию можно узнать, что метод Рунге-Кутты 4-го порядка более устойчив, оптимален и универсален по сравнению с другими методами (к примеру, Эйлера). Он сочетает в себе высокую точность и приемлемую вычислительную нагрузку, что немало важно для многих решений задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А.П. Будущее теории электрических цепей: инновационные подходы и технологии // Электротехника. – 2021. – № 3. – С. 12–18.

2. Лебедев А.Н. Альтернативные методы расчета электрических цепей // Электрические и электронные системы. – 2019. – № 2. – С. 34–40.

3. Соловьев Д.А. Изучение нестандартных моделей электрических цепей в современных исследованиях // Научные труды электрофизиков. – 2022. – № 8. – С. 22–29.

4. Ребенков Е.С. Переходные процессы // Теоретические основы электротехники. – 2013. – № 1. – С. 33–36.

5. Тылес М.Г. Переходные процессы в электрических цепях // Теория электрических цепей и компьютерный анализ режимов. – 2024. – № 2. – С. 79–82.