

УДК 51-75, 519.2

Назарбаев Фархат Токтогазиевич – Старший преподаватель Кыргызского национального университета имени Ж.Баласагына

E-mail: nft8888@gmail.com

Самат уулу Райысбек – магистрант Кыргызского национального университета имени Ж.Баласагына

E-mail: raisbeksamatovv@gmail.com

Эсенбай кызы Нургүл – магистрантка Кыргызского национального университета имени Ж.Баласагына

E-mail: nurgulesenbaeva91@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ И ОБОСНОВАНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ТАБЛИЦ СМЕРТНОСТИ ДЛЯ ДРОБНЫХ ВОЗРАСТОВ

Аннотация. В статье исследуется обоснование выбора параболической интерполяции таблиц смертности предложенные в работах [1], [2] и [3]. Приводится обоснование выбора такого метода интерполяции, с различными примерами аппроксимации. Также в конце приводятся простые примеры применения параболической интерполяции таблиц смертности для дробных возрастов на примере таблиц смертности предоставляемых национальным статистическим комитетом Кыргызской Республики.

Annotation. The article explores the rationale for choosing a parabolic interpolation of mortality tables proposed in [1], [2] and [3]. The rationale for choosing such an interpolation method is given, with various examples of approximation. Also at the end, simple examples of the application of parabolic interpolation of mortality tables for fractional ages are given using the example of mortality tables provided by the National Statistical Committee of the Kyrgyz Republic.

Ключевые слова: актуарная математика, таблицы смертности, интерполяция таблиц смертности, таблицы смертности для дробных возрастов, страхование жизни.

Keywords: actuarial mathematics, mortality table, interpolation of mortality tables, mortality tables for fractional ages, life insurance.

В работах [4] и [5] исследовались таблицы смертности подробным образом, и в работе [4] также приводятся методы интерполяции для дробных возрастов, такие как линейная, гармоническая и другие. Но, в частности, в работах [1] и [2] приводятся недостатки таких методов интерполяции, и предлагается автором параболический метод интерполяции, но тем не менее там не приводятся достаточные основания применения данного метода для таблиц смертности Кыргызстана. Давайте мы приведем несколько примеров в пользу данного метода интерполяции.

Линейная интерполяция $s(x + t) = (1 - t)s(x) + ts(x + 1)$ [4], показательная интерполяция $\ln s(x + t) = (1 - t)\ln s(x) + t\ln s(x + 1)$ [4] при такой интерполяции получаем показательную функцию для вероятности дожития ${}_t p_x$, и гармоническая интерполяция $1 / s(x + t) = (1 - t) / s(x) + t / s(x + 1)$ [4] (предположение Бальдуччи), поскольку в этом случае ${}_t p_x$ является гиперболической функцией, но ни один из них нам не подходит так как графики данных функций имеют выпуклость вниз или вообще не имеет ее.

Давайте построим график и их аппроксимации линейную и логарифмическую (показательную) функцию с их коэффициентами достоверности аппроксимации функции интерполяций

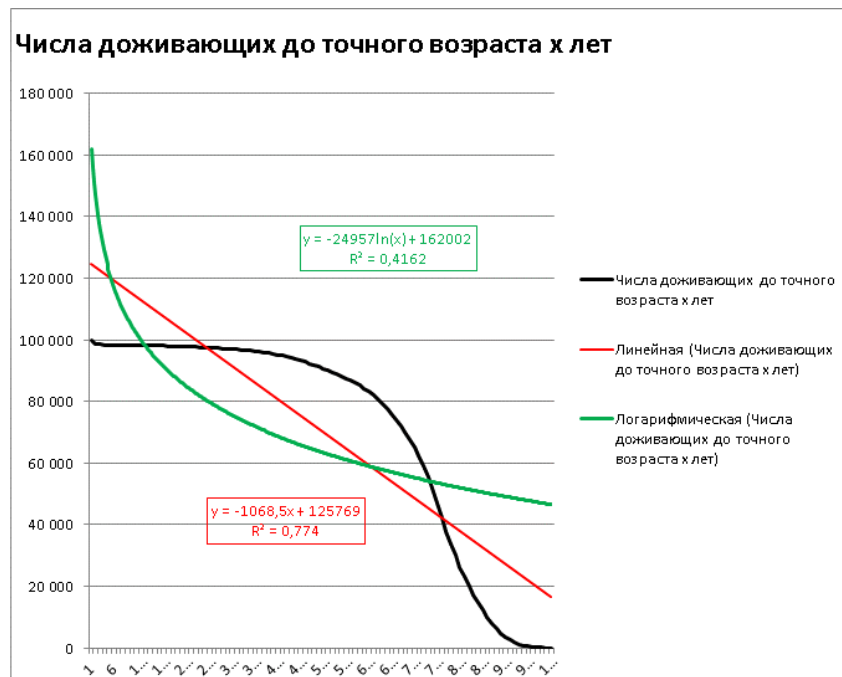


Рис 1. График линейной и логарифмической (показательной) интерполяции

Как видно из графика и полученных на ней формулах интерполяций мы получили следующие результаты:

линейная интерполяция: $y = -1068,5x + 125769$; $R^2 = 0,774$,

логарифмическая интерполяция: $y = -24957\ln(x) + 162002$; $R^2 = 0,4162$.

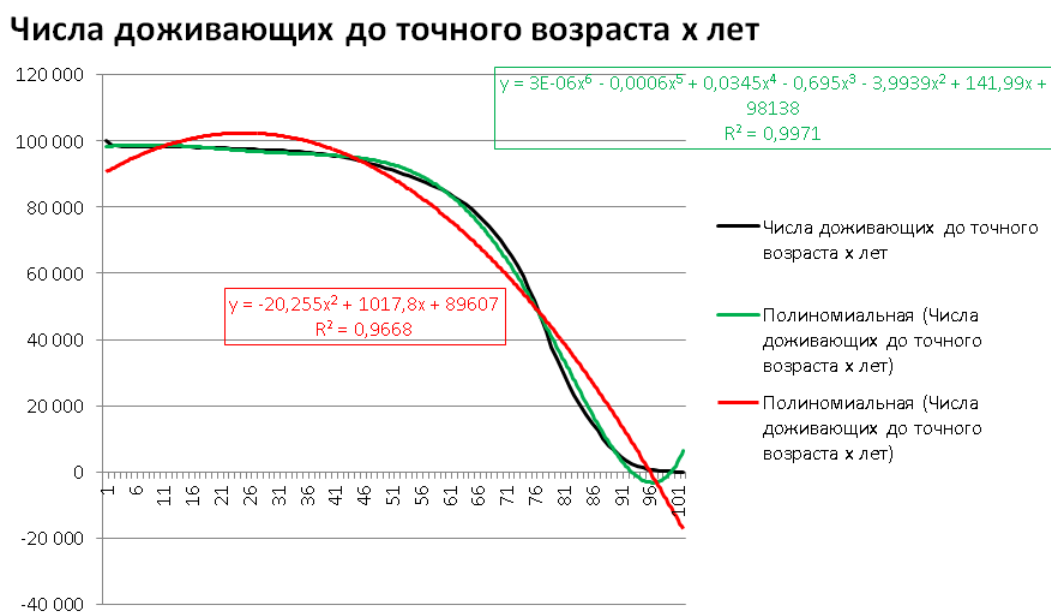


Рис 2. График полиномиальной интерполяции

Ниже даны результаты из полученного графика и формул интерполяций:

полиномиальная квадратичная интерполяция: $y = -20,255x^2 + 1017,8x + 89607$; $R^2 = 0,9668$, полиномиальная интерполяция шестой степени:

$$y = 0,000003x^6 - 0,0006x^5 + 0,0345x^4 - 0,695x^3 - 3,9939x^2 + 141,99x + 98138; R^2 = 0,9971.$$

А если посмотреть на график функции из имеющихся данных для целых возрастов мы получаем график функции, имеющий в большей части выпуклость вверх.

Притом видно, что график функции на интересующей нас области от 10-75 лет имеет выпуклость вверх. Коэффициент достоверности аппроксимации R^2 – имеет более высокую точность в полиномиальных интерполяциях. Например в квадратичной и полиномиальной интерполяции 6-й степени. Из этого можно сделать вывод, что необходимо интерполяционная формула с выпуклостью вверх и полиномиальной интерполяцией. Подходящей будет параболическая интерполяция, т.к. при увеличении мы усложним вычислительный процесс, а точность тем не менее не будет также быстро расти. И учитывая, что при параболической интерполяции коэффициент достоверности аппроксимации составляет 96,68%, а при полиномиальной интерполяции 99,71, т.е. вычислительные процессы возрастают в разы, а точность практически одинаковая. И притом, нет возможности гарантировать при интерполировании полиномами 6-й степени постоянство убывания функции, а при квадратичной интерполяции она будет очевидной, как будет указано ниже.

Для определения метода интерполяции построим график функции дожития, используя дискретные данные для целых возрастов, предоставленные национальным статистическим комитетом [6]. График выглядит следующим образом:

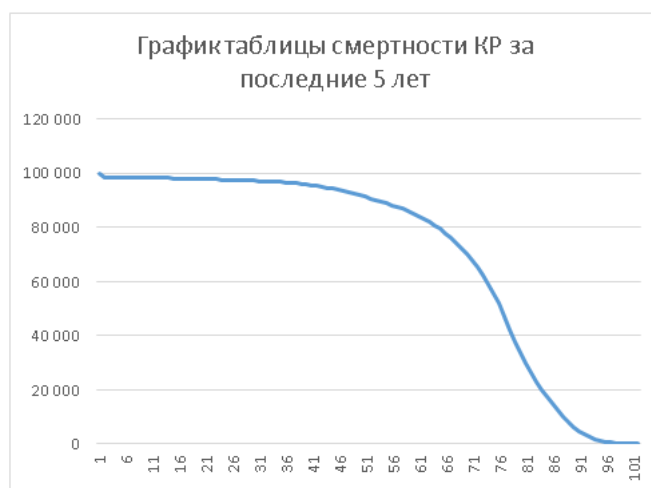


Рис 3. График таблицы смертности КР за последние 5 лет

Как видно на графике таблицы смертности, сразу видно, что график до 75-80 лет имеет выпуклость вверх. Соответственно на этом интервале нужно применять сплайн интерполяцию имеющую выпуклость вверх. И так как данный график имеет форму похожую на параболу можно применить формулу параболической интерполяции:

$$s(x + t) = \sqrt{s^2(x) + t(s^2(x + 1) - s^2(x))}.$$

На примере данных для населения Кыргызстана мы рассмотрели результаты, сравнив которые, нами установлено, что данные полученные расчётом по предлагаемой формуле наиболее точно описывают смертность населения в определенном возрасте.

Большая вероятность точности таблицы смертности зависит от качества собранных данных. Так называемым продуктом для построения таблиц смертности служит число людей доживающих от рождения до определённого возраста.

Построим график для дробных возрастов.

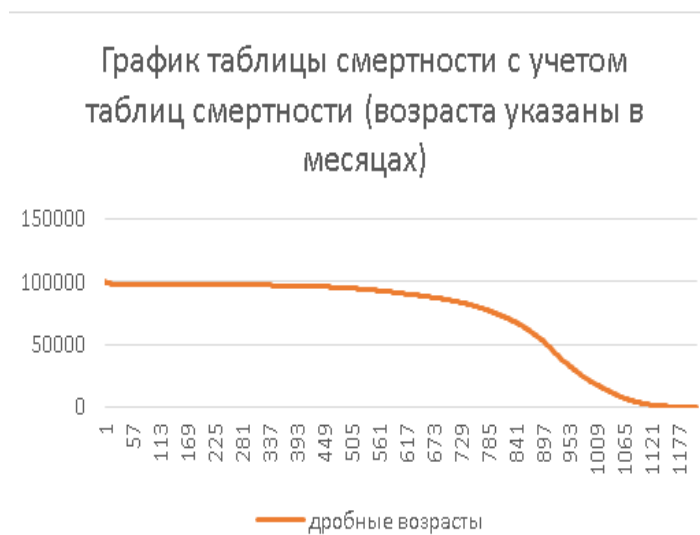


Рис 4. График таблиц смертности по месяцам.

Посмотрим на график сравнения дробных возрастов с целыми возрастами.

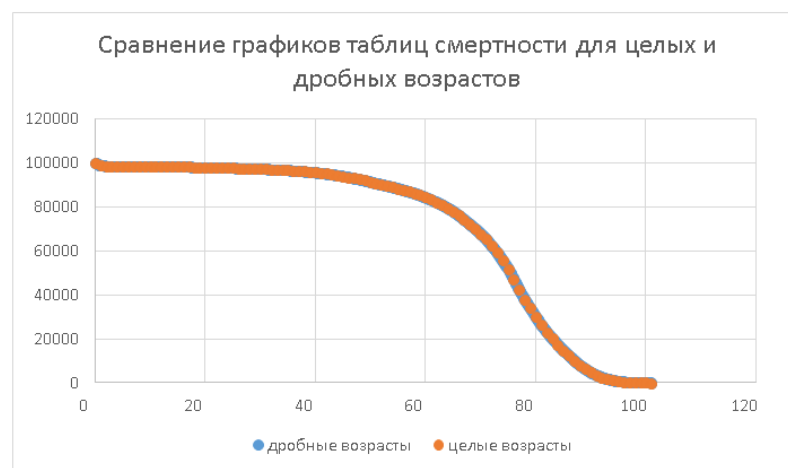


Рис 5. Сравнение графиков таблиц смертности для целых и дробных возрастов

График показывает, что интерполяция является более предпочтительной, нежели интерполяции предложенные в [4].

Применение таблиц смертности и распределения продолжительности жизни в различных задачах

Рассмотрим несколько элементарных примеров с применением параболической интерполяции в задачах актуарной математики.

Пример 1. Вычислить вероятность дожития мужчины в возрасте 18 лет и 4 месяца, до пенсионного возраста, который в Кыргызстане составляет 63 года.

Решение.

Из таблицы смертности взятого с сайта Национального статистического комитета невозможно определить число доживших до возраста 18 лет и 4 месяца. Поэтому необходимо воспользоваться методами интерполяции. В нашем случае мы воспользуемся параболической интерполяцией указанной выше.

$$l_{18} = 97\,954; \quad l_{19} = 97\,877 \text{ и } l_{63} = 80\,765$$

Сначала определим число доживших до возраста 18 лет и 4 месяца

$$l_{18\frac{1}{3}} = \sqrt{l_{18}^2 + \frac{1}{3}(l_{19}^2 - l_{18}^2)} = \sqrt{97954^2 + \frac{1}{3}(97877^2 - 97954^2)} \approx 97929$$

$$p_{18\frac{1}{3}:44\frac{2}{3}} = \frac{80\,765}{97\,929} \approx 0.825$$

Ответ: 82,5%

Пример 2. Определить размер полюса страхования на дожитие, если мужчине на данный момент 54. Единовременная выплата составляет 700 000 сом по достижению застрахованным лицом 70 лет. Учитывайте рыночную процентную ставку равную $i = 0,08$.

Решение.

Сначала определим число доживших до возраста $l_{54} = 88\,902$; $l_{70} = 67\,706$.

$$A_{54:16} = P \cdot \frac{l_{54+16}}{l_{54}} \cdot (1 + i)^{-16} = 700000 \cdot \frac{67\,706}{88\,902} \cdot (1 + 0,08)^{-16} \approx 155608,60$$

(сом).

Ответ: 155608,60 сом

Пример 3. Вычислить вероятность дожития мужчины в возрасте 21 лет и 5 месяцев, до возраста 80 лет.

Решение.

Из таблицы смертности взятого с сайта Национального статистического комитета невозможно определить число доживших до возраста 21 лет и 5 месяцев. Поэтому необходимо воспользоваться методами интерполяции. В нашем случае мы воспользуемся параболической интерполяцией указанной выше.

$$l_{21} = 97\,764; \quad l_{22} = 97\,712 \text{ и } l_{80} = 29\,970$$

Сначала определим число доживших до возраста 21 лет и 5 месяцев

$$l_{21\frac{5}{12}} = \sqrt{l_{21}^2 + \frac{1}{3}(l_{22}^2 - l_{21}^2)} = \sqrt{97\,764^2 + \frac{1}{3}(97\,712^2 - 97\,764^2)} \approx 97\,742$$

$$p_{21\frac{5}{12}:58\frac{7}{12}} = \frac{29\,970}{97\,742} \approx 0.307$$

Ответ: 30,7%

Применение математических моделей, таких как линейная, показательная и полиномиальная интерполяции, позволило адаптировать таблицы смертности к условиям Кыргызстана, учитывая как целые, так и дробные возрасты. Это повысило точность прогнозов и позволило более точно оценить вероятности дожития и риски смертности для различных возрастных групп. Использование данных Национального статистического комитета КР стало основой для построения надежных и актуальных демографических моделей.

Литература

1. Назарбаев Ф.Т. Параболическая интерполяция таблиц смертности для дробных возрастов. Материалы VII Всемирного Конгресса математиков

- туркского мира (TWMS Congress-2023)(Часть II), Туркестан, Казахстан: 2023, С. 94-97.
2. Назарбаев Ф.Т., Доолбекова А.У. Об одном методе интерполяции таблиц смертности для дробных возрастов // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 6-3 (69), Июнь 2022, ISSN 2500-1000 pp. 103-107.
 3. Nazabaev F.T., Bakberdieva M.B. Examples of the application of parabolic interpolation of mortality tables for fractional ages // Herald of institute mathematics of the national academy of sciences of the Kyrgyz Republic. 2, 2023, С. 129-133
 4. Актуарная математика / Н.Бауэрс, Х.Гербер и др. Пер. с англ. Под ред. В.К.Малиновского - М.: "Янус-К", 2001. - 656 с
 5. Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. - 2-е, переработанное и дополненное. - М.: Анкил, 2002 г. 262 стр. ISBN 5-86476-194-X.
 6. Демографический ежегодник Кыргызской Республики: 2016-2020.-Б: Нацстатком Кырг. Респ., 2021:-312с. ISBN 978-9967-26-837-1

Literature

1. Nazarbaev F.T. Parabolicheskaya interpolyaciya tablic smertnosti dlya drobnih vozrastov. Materialy VII Vsemirnogo Kongressa matematikov tyurkskogo mira (TWMS Congress-2023)(Chast' II), Turkestan, Kazahstan: 2023, S. 94-97.
2. Nazarbaev F.T., Doolbekova A.U. Ob odnom metode interpolyacii tablic smertnosti dlya drobnih vozrastov // Mezhdunarodnyj zhurnal gumanitarnyh i estestvennyh nauk. 6-3 (69), Iyun' 2022, ISSN 2500-1000 pp. 103-107.
3. Nazabaev F.T., Bakberdieva M.B. Examples of the application of parabolic interpolation of mortality tables for fractional ages // Herald of institute

mathematics of the national academy of sciences of the Kyrgyz Republic. 2, 2023, C. 129-133

4. Aktuarnaya matematika / N.Bauers, H.Gerber i dr. Per. s angl. Pod red. V.K.Malinovskogo - M.: "Yanus-K", 2001. - 656 s
5. Falin G.I. Matematicheskie osnovy teorii strahovaniya zhizni i pensionnyh skhem. - 2-e, pererabotannoe i dopolnennoe. - M.: Ankil, 2002 g. 262 str. ISBN 5-86476-194-X.
6. Demograficheskij ezhegodnik Kyrgyzskoj Respubliki: 2016-2020.-B: Nacstatkom Kyrg. Resp., 2021:-312s. ISBN 978-9967-26-837-1