

***Маклаков Владимир Петрович***

*Доцент, Брянский государственный технический университет,  
Россия, г. Брянск*

***Ипаткин Александр Олегович***

*Студент, Брянский Государственный Технический Университет  
Россия, г. Брянск*

***Левин Максим Сергеевич***

*Студент, Брянский Государственный Технический Университет  
Россия, г. Брянск*

***Шереметьев Матвей Денисович***

*Студент, Брянский Государственный Технический Университет  
Россия, г. Брянск*

***Шмат Андрей Сергеевич***

*Студент, Брянский Государственный Технический Университет  
Россия, г. Брянск*

## **ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**Аннотация.** Комплексные числа представляют собой важный инструмент в математике и физике, который находит широкое применение в различных областях науки и техники. Одной из таких областей является теория цепей электрических систем, где комплексные числа играют ключевую роль в анализе и расчете электрических цепей переменного тока. В отличие от постоянного тока, переменный ток характеризуется изменением величины и направления во времени, что делает его анализ более сложным. Однако использование комплексных чисел значительно упрощает этот процесс, позволяя применять алгебраические методы вместо громоздких графических.

Актуальность данной работы обусловлена необходимостью глубокого понимания принципов работы электрических систем, особенно в

условиях современного технологического прогресса. С увеличением сложности электрических цепей и систем, а также с ростом их применения в различных отраслях, таких как энергетика, телекоммуникации и автоматизация, становится все более важным овладение методами анализа, которые позволяют эффективно решать задачи, связанные с переменным током. Комплексные числа, благодаря своей способности описывать как амплитуду, так и фазу сигналов, становятся незаменимыми в этой области.

В данной работе будет рассмотрен ряд ключевых тем, которые помогут углубить понимание применения комплексных чисел в теории цепей электрических систем. В первой части работы будет представлен вводный раздел, посвященный комплексным числам и их свойствам. Это позволит читателю ознакомиться с основами, необходимыми для дальнейшего изучения темы. Затем будет рассмотрена физическая основа переменного тока, что поможет понять, как и почему возникают фазовые сдвиги и как они влияют на работу электрических цепей.

Следующий раздел будет посвящен анализу импеданса с использованием комплексных чисел. Импеданс, как обобщение сопротивления для переменного тока, является важным понятием, которое необходимо для понимания поведения цепей. Обобщенный закон Ома, который будет подробно рассмотрен в отдельной главе, также играет ключевую роль в анализе электрических цепей и позволяет применять известные законы постоянного тока к переменному.

Методы расчета электрических цепей с использованием комплексных чисел будут освещены в следующем разделе, где будут представлены различные подходы и техники, позволяющие эффективно решать задачи, связанные с анализом цепей. Практические примеры расчетов помогут закрепить теоретические знания и продемонстрировать, как комплексные числа могут быть использованы для решения реальных задач.

Наконец, работа завершится обсуждением перспектив использования комплексных чисел в современных электрических системах. Это позволит оценить, как дальнейшее развитие технологий может повлиять на методы анализа и проектирования электрических цепей, а также на возможности применения комплексных чисел в новых областях.

Таким образом, данная работа направлена на систематизацию знаний о применении комплексных чисел в теории цепей электрических систем и на углубление понимания их роли в современном электротехническом анализе.

**Ключевые слова:** комплексные числа, постоянный ток, переменный ток, импеданс, электрическая цепь, законы Киргофа, метод узловых потенциалов, метод контурных токов, векторные величины.

**Цель** данной статьи заключается в изучении применения комплексных чисел в анализе электрических цепей и систем, что позволяет упростить расчет и анализ. В статье показано, как использование комплексных чисел помогает в решении дифференциальных уравнений и упрощает процесс вычисления токов и напряжений в цепях переменного тока.

### **Введение в комплексные числа и их свойства**

Комплексные числа представляют собой важный инструмент в теории цепей, позволяя более эффективно анализировать переменные величины электрических систем. Они определяются алгебраической формой  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — вещественные числа, а  $i$  — мнимая единица, обладающая свойством, что  $i^2 = -1$  [12]. С их помощью можно удобно описывать как действительную, так и мнимую части электрических параметров.

Наиболее распространёнными операциями над комплексными числами являются сложение, вычитание, умножение и деление. При сложении и вычитании комплексных чисел важно учитывать их вещественные и мнимые части отдельно. Умножение выполняется по распределительному закону, а для деления требуется использование сопряжённого числа [2]. Эти операции позволяют легко решать уравнения, включающие переменные с мнимыми компонентами, что значительно упрощает анализ электрических цепей.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел представляет их на комплексной плоскости, где вещественная часть располагается по горизонтальной оси, а мнимая по вертикальной. Это позволяет не только визуализировать сами числа, но и делать выводы о их характеристиках, таких как модуль и аргумент. Модуль выражается как  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , а аргумент — угол между положительной осью действительных чисел и линией, соединяющей точку с началом координат [30].

Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел способны облегчить операции между ними. Через формулу Муавра можно выразить степени комплексных чисел, что особенно полезно при анализе цепей переменного тока, когда имеет место использование фазы [1]. Это связано с тем, что фазовый угол и амплитуда играют ключевую роль в осуществлении корректных расчетов.

Решение алгебраических уравнений, включающих комплексные числа, стало возможным именно благодаря их свойствам. Хотя некоторые уравнения не имеют действительных корней, введение комплексных чисел расширяет возможности нахождения решений [10]. В этом контексте неупорядоченность комплексных чисел также становится важной. Сравнивать их можно лишь по равенству, что в некоторых ситуациях упрощает анализ.

Суммируя, можно сказать, что комплексные числа обеспечивают мощный математический аппарат для работы с электрическими цепями, позволяя значительно упростить анализ и расчёты.

### **Методы расчета электрических цепей с использованием комплексных чисел**

Методы расчета электрических цепей, основанные на комплексных числах, представляют собой мощный инструмент для анализа как постоянного, так и переменного тока. Использование комплексных величин позволяет значительно упростить работу с электрическими цепями, особенно в частности, когда необходимо учитывать реактивные компоненты, такие как индуктивности и емкости.

При расчете электрических цепей постоянного тока применяются методы эквивалентного преобразования и законы Кирхгофа. Однако, когда речь идет о переменном токе, необходимо учитывать не только действительную, но и реактивную составляющую. В этом контексте комплексное сопротивление  $Z$  выражается как сумма действительной части  $R$  и мнимой части  $jX$ , где  $X$  — это реактивное сопротивление, зависящее от частоты[15]. С помощью таких комплексных функций можно более просто решать задачи в рамках теоретических основ электротехники.

Методы расчета сложных электрических цепей, включая метод узловых потенциалов и метод контурных токов, также допускают использование комплексных чисел для упрощения процессов. Это позволяет исследовать цепи даже в очень сложных (например, многопараметрических) системах, что делает анализ более точным и быстрым[13].

Также стоит отметить важность визуализации векторных величин в комплексной плоскости, где ось действительных чисел соответствует активной части, а ось мнимых — реактивной. Это дает возможность не

только анализировать амплитуды токов и напряжений, но и их фазовые соотношения, что является критически важным в системах переменного тока[31].

При решении задач, связанных с однофазными и трехфазными цепями, подходы с использованием комплексных чисел обеспечивают универсальность, позволяя применять стандартные формулы для вычислений. Ряд методик включает преобразования схем с использованием звезды и треугольника, которые также можно адаптировать для комплексной формы записи[14].

Применение законов Кирхгофа в комплексной форме позволяет вести расчет токов и напряжений в цепи одновременно, упрощая визуализацию и понимание результатов. На уровне практического применения важной задачей остается контроль за разными источниками мощности и их влиянием на электрическую сеть, что требует глубокого понимания как теории, так и практики[25].

Методология расчета электрических цепей с использованием комплексных чисел обеспечивает способность исследовать не только традиционные электрические системы, но и более сложные технологии с их интеграцией в современные электрические сети и системы распределения энергии. Это, в свою очередь, открывает новые горизонты в области исследований и применений в электроэнергетике, тем самым придавая большой практический вес теоретическим знаниям.

### **Перспективы использования комплексных чисел в современных электрических системах**

Применение комплексных чисел в современных электрических системах открывает новые горизонты для более точного и эффективного анализа цепей переменного тока. Эти числа позволяют свести сложные

вычисления к более простым алгебраическим операциям, что значительно облегчает задачи проектирования и эксплуатации электрических сетей. Использование комплексных чисел также способствует более глубокому пониманию явлений, происходящих в цепях, таких как импеданс, фазы и резонансные явления [21].

### Список литературы

1. Книга-angeom.dvi [Электронный ресурс] // math.phys.msu.ru - Режим доступа: [http://math.phys.msu.ru/archive/2016\\_2017/24/konspekt2.pdf](http://math.phys.msu.ru/archive/2016_2017/24/konspekt2.pdf), свободный. - Загл. с экрана
2. В.Т. Дубровин [Электронный ресурс] // kpfu.ru - Режим доступа: <https://kpfu.ru/docs/f1855528304/complex.pdf>, свободный. - Загл. с экрана
3. Глава 6 [Электронный ресурс] // edu.ikit.sfu-kras.ru - Режим доступа: [https://edu.ikit.sfu-kras.ru/files/kb/elect\\_schem/lekci/1\\_10.pdf](https://edu.ikit.sfu-kras.ru/files/kb/elect_schem/lekci/1_10.pdf), свободный. - Загл. с экрана
4. Закон Ома [Электронный ресурс] // www.sonel.ru - Режим доступа: <https://www.sonel.ru/ru/biblio/knowledge-centre/reference-book/electrical-engineering-law/ohms-law/>, свободный. - Загл. с экрана
5. Закон Ома для цепи переменного тока. Мощность [Электронный ресурс] // zachnik-com.com - Режим доступа: <https://zachnik-com.com/spravochnik/fizika/elektromagnitnye-kolebanija-volny/zakon-oma-moschnost/>, свободный. - Загл. с экрана
6. Закон Ома для электрической цепи переменного тока. [Электронный ресурс] // rutube.ru - Режим доступа: <https://rutube.ru/video/ce0111b16918e60f0a3c3dfb81734e05/>, свободный. - Загл. с экрана
7. Закон Ома: формулы для участка цепи [Электронный ресурс] // znanierussia.ru - Режим доступа: [https://znanierussia.ru/articles/закон\\_ома](https://znanierussia.ru/articles/закон_ома), свободный. - Загл. с экрана

8. Использование комплексных чисел при расчете силы... [Электронный ресурс] // multiurok.ru - Режим доступа: <https://multiurok.ru/files/ispolzovanie-kompleksnykh-chisel-pri-raschete-sily.html>, свободный. - Загл. с экрана

9. Использование комплексных чисел... [Электронный ресурс] // scienceforum.ru - Режим доступа: <https://scienceforum.ru/2017/article/2017038265>, свободный. - Загл. с экрана

10. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА [Электронный ресурс] // rsmu.ru - Режим доступа: [https://rsmu.ru/fileadmin/templates/doc/faculties/pf/physmat/akimov\\_kompl\\_chisla.pdf](https://rsmu.ru/fileadmin/templates/doc/faculties/pf/physmat/akimov_kompl_chisla.pdf), свободный. - Загл. с экрана

11. Картинки по запросу "характеристики переменного тока" [Электронный ресурс] // yandex.ru - Режим доступа: <https://yandex.ru/images/search?text=характеристики переменного тока>, свободный. - Загл. с экрана

12. Комплексное число — Википедия [Электронный ресурс] // ru.wikipedia.org - Режим доступа: [https://ru.wikipedia.org/wiki/комплексное\\_число](https://ru.wikipedia.org/wiki/комплексное_число), свободный. - Загл. с экрана

13. Методы расчета цепей постоянного тока [Электронный ресурс] // nti.ncfu.ru - Режим доступа: [https://nti.ncfu.ru/vikon/sveden/files/25\\_mu\\_teoreticheskie\\_osnovy\\_elektrotehniki\\_pr\\_13.03.02\\_2021\\_ofo.pdf](https://nti.ncfu.ru/vikon/sveden/files/25_mu_teoreticheskie_osnovy_elektrotehniki_pr_13.03.02_2021_ofo.pdf), свободный. - Загл. с экрана

14. Методы расчета электрических цепей [Электронный ресурс] // spravochnick.ru - Режим доступа: [https://spravochnick.ru/fizika/elektricheskie\\_cep\\_i\\_-\\_chto\\_eto/metody\\_rascheta\\_elektricheskikh\\_cepuy/](https://spravochnick.ru/fizika/elektricheskie_cep_i_-_chto_eto/metody_rascheta_elektricheskikh_cepuy/), свободный. - Загл. с экрана

15. Методы расчёта линейных электрических [Электронный ресурс] // books.ifmo.ru - Режим доступа: <https://books.ifmo.ru/file/pdf/870.pdf>, свободный. - Загл. с экрана

16. Основные параметры переменного тока: период, частота, фаза... [Электронный ресурс] // [electricalschool.info](http://electricalschool.info) - Режим доступа: <https://electricalschool.info/spravochnik/electroteh/1807-osnovnyye-parametry-peremennogo-toka.html>, свободный. - Загл. с экрана

17. Переменный ток — Википедия [Электронный ресурс] // [ru.wikipedia.org](http://ru.wikipedia.org) - Режим доступа: [https://ru.wikipedia.org/wiki/переменный\\_ток](https://ru.wikipedia.org/wiki/переменный_ток), свободный. - Загл. с экрана

18. Переменный электрический ток и его характеристики • Физика [Электронный ресурс] // [foxford.ru](http://foxford.ru) - Режим доступа: <https://foxford.ru/wiki/fizika/peremennyyu-elektricheskiy-tok-i-ego-harakteristiki>, свободный. - Загл. с экрана

19. Почему для расчетов в цепях переменного тока используются... [Электронный ресурс] // [electricalschool.info](http://electricalschool.info) - Режим доступа: <https://electricalschool.info/spravochnik/electroteh/1922-pochemu-dlja-raschetov-v-serjakh.html>, свободный. - Загл. с экрана

20. Почему комплексные числа необходимы для расчетов в цепях... [Электронный ресурс] // [electroinfo.net](http://electroinfo.net) - Режим доступа: <https://electroinfo.net/uncategorized/pochemu-dlya-raschetov-v-tsepyax-peremennogo-toka-ispolzuyutsya-kompleksnye-chisla.html>, свободный. - Загл. с экрана

21. Приложение комплексных чисел в электротехнике [Электронный ресурс] // [moluch.ru](http://moluch.ru) - Режим доступа: <https://moluch.ru/archive/37/4252/>, свободный. - Загл. с экрана

22. Применение комплексных чисел в электротехнике [Электронный ресурс] // [science.kuzstu.ru](http://science.kuzstu.ru) - Режим доступа: <https://science.kuzstu.ru/wp-content/events/conference/rm/2016/rm16/pages/articles/ffp/51/8.pdf>, свободный. - Загл. с экрана

23. Применение комплексных чисел в электротехнике - от расчета... [Электронный ресурс] // [mksegment.ru](http://mksegment.ru) - Режим доступа:

<https://mksegment.ru/d/primenenie-kompleksnyh-chisel-v-ehlektrotekhnike-ot-rascheta-ehlektricheskikh-cepej-do-analiza-ehlektromagnitnyh-polej>, свободный. - Загл. с экрана

24. Применение комплексных чисел при расчете электрических...  
[Электронный ресурс] // [rep.bsatu.by](http://rep.bsatu.by) - Режим доступа: <https://rep.bsatu.by/bitstream/doc/13729/1/primenenie-kompleksnyh-chisel-pri-raschete-ehlektricheskikh-cepej.pdf>, свободный. - Загл. с экрана

25. Расчет электрических цепей постоянного и переменного тока...  
[Электронный ресурс] // [wika.tutoronline.ru](http://wika.tutoronline.ru) - Режим доступа: <https://wika.tutoronline.ru/fizika/class/10/pravila-rascheta-elektricheskikh-czepej-postoyannogo-i-peremennogo-toka>, свободный. - Загл. с экрана

26. Расчет электрических цепей в комплексных числах | Дзен  
[Электронный ресурс] // [dzen.ru](http://dzen.ru) - Режим доступа: <https://dzen.ru/video/watch/6023400253b5a470dc540ee1>, свободный. - Загл. с экрана

27. Расчет электрических цепей с помощью комплексных чисел  
[Электронный ресурс] // [www.youtube.com](http://www.youtube.com) - Режим доступа: [https://www.youtube.com/watch?v=\\_pc29di4aky](https://www.youtube.com/watch?v=_pc29di4aky), свободный. - Загл. с экрана

28. Символический метод расчета цепей переменного тока  
[Электронный ресурс] // [websor.ru](http://websor.ru) - Режим доступа: [https://websor.ru/osnovy/teoreticheskie-osnovy-elektrotehniki/metod\\_rascheta/](https://websor.ru/osnovy/teoreticheskie-osnovy-elektrotehniki/metod_rascheta/), свободный. - Загл. с экрана

29. Статья на тему: "Комплексные числа в электротехнике"  
[Электронный ресурс] // [infourok.ru](http://infourok.ru) - Режим доступа: <https://infourok.ru/statya-na-temu-kompleksnye-chisla-v-elektrotehnike-5471676.html>, свободный. - Загл. с экрана

30. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ [Электронный ресурс] // [teach-in.ru](http://teach-in.ru) - Режим доступа: <https://teach-in.ru/file/synopsis/pdf/tfkr-popov-p1-m-3.pdf>, свободный. - Загл. с экрана

31. Теоретические основы электротехники. [Электронный ресурс] // [www.inuесо.ru](https://www.inuесо.ru/rio/2021/978-5-6046573-0-0.pdf) - Режим доступа: <https://www.inuесо.ru/rio/2021/978-5-6046573-0-0.pdf>, свободный. - Загл. с экрана

32. Характеристики переменного тока. Переменный ток... | Дзен [Электронный ресурс] // [dzen.ru](https://dzen.ru/a/yaбcfyfsz38av5h6) - Режим доступа: <https://dzen.ru/a/yaбcfyfsz38av5h6>, свободный. - Загл. с экрана

33. Электротехника (ТОЭ). Лекция 7. Обобщенный закон Ома [Электронный ресурс] // [www.youtube.com](https://www.youtube.com/watch?v=l4y2jwtaabu) - Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=l4y2jwtaabu>, свободный. - Загл. с экрана

34. анализ цепей - Импеданс и комплексные числа - Electrical... [Электронный ресурс] // [tr-page.yandex.ru](https://tr-page.yandex.ru/translate?lang=en-ru&url=https://electronics.stackexchange.com/questions/743019/impedance-and-complex-numbers) - Режим доступа: <https://tr-page.yandex.ru/translate?lang=en-ru&url=https://electronics.stackexchange.com/questions/743019/impedance-and-complex-numbers>, свободный. - Загл. с экрана