УДК 532.517.3+532.511

Каянович Сергей Сергеевич

Должность: Доцент кафедры высшей математики БГУИР
Степень: Кандидат физмат наук
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,

Минск, Республика Беларусь

ВИДОИЗМЕНЁННЫЕ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ – СТОКСА

Аннотация. На основании известных экспериментальных данных изучаются течения вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости в плоской трубе при значениях чисел Рейнольдса в диапазоне $1 < \mathrm{Re} < 1000$ (первый диапазон) и в диапазоне $\mathrm{Re}'_{кр} < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$ (второй диапазон), где $\mathrm{Re}'_{кр}$ – нижнее критическое число Рейнольдса ($\mathrm{Re}'_{кр} > 1000$, $\mathrm{Re}'_{кр} \approx 1000$), $\mathrm{Re}_{кр}$ – переходное критическое число Рейнольдса ($\mathrm{Re}_{кр} >> \mathrm{Re}'_{кр}$). Ищутся ответы на два вопроса: «Являются ли течения при числах Рейнольдса, соответствующих второму из указанных диапазонов, плоскими течениями Пуазейля?» и «Выполняется ли уравнение неразрывности автоматически при числах Рейнольдса из второго диапазона?». С использованием экспериментальных данных проводится доказательство факта: движение жидкости не может быть течением Пуазейля, если число Рейнольдса принадлежит второму диапазону (теорема 1). Также доказывается, что в течении при числе Рейнольдса из второго диапазона существует ненулевая поперечная компонента скорости и при возрастании числа Рейнольдса имеет место процесс турбулизации течения (теорема 2).

Ключевые слова: течения Пуазейля и турбулентное, сила возмущения, вязкое напряжение, нижнее и переходное критические числа Рейнольдса, процесс турбулизации.

Введение. В [1] было предложено для описания течений вязкой жидкости применять модифицированные уравнения Навье – Стокса, содержащие слагаемые с малым положительным коэффициентом ε, отсутствующие в классических уравнениях. Это связано с вопросом о том, имеет ли место однозначная разрешимость «в целом» начально-краевой задачи для этих уравнений. Указанный вопрос изучался в [2], где было использовано продифференцированное уравнение неразрывности. В данной статье на основе анализа экспериментальных данных показана правомерность подхода, применённого в [2].

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости, при наличии градиента давления, между двумя неподвижными параллельными пластинами (твёрдыми стенками), расположенными в плоскостях $x_2 = \pm h$. Такое движение может быть названо течением жидкости сквозь «плоскую трубу» [3]. Пусть u_1, u_2, u_3 – компоненты скорости $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ в направлении осей x_1, x_2, x_3 соответственно (далее u_1 называем продольной, u_2 – поперечной скоростями; $u_3 \equiv 0$ в дальнейших рассуждениях не участвует). Помимо того, что $u_3 \equiv 0$, рассматриваемое течение не зависит от переменной x_3. Поэтому далее считаем течение плоским и $\bar{u} = (u_1, u_2)$. Длину трубы полагаем равной L, так что $0 \le x_1 \le L,$, $-h \le x_2 \le h$.

Постановка задачи. Примем следующие обозначения:

$\Omega = [0 < x_1 < L, -h < x_2 < h;$ $S_1 = [0 \le x_1 \le L; x_2 = -h]$, $S_2 = [0 \le x_1 \le L; x_2 = h]$, $S_{тв} = \bigcup_{k=1}^{2} S_k$, $S_3 = [x_1 = 0; -h \le x_2 \le h]$, $S_4 = [x_1 = L; -h \le x_2 \le h]$; $S = \bigcup_{k=1}^{4} S_k$, $S_{нор} = \bigcup_{k=1}^{3} S_k$; S_1, S_2 – две твёрдые стенки, $S_{тв}$ – твёрдая часть поверхности, S_3 – вход в трубу, S_4 – выход из неё, S – граница области течения. Рассмотрим задачу (считаем, что плотность $\rho = 1$; тогда динамический коэффициент вязкости η (далее –

динамическая вязкость) численно равен её кинематическому коэффициенту ν (далее – кинематическая вязкость)).

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2; \qquad (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \qquad (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{2}$$

$$u_i\big|_S = \psi_i(s), \;\; i = 1, 2; \quad \psi_i\big|_{S_{тв}} = 0; \quad \left.\frac{\partial p}{\partial \overline{n}}\right|_{S_{нор}} = g(s); \quad p\big|_{S_4} = p_a, \tag{3}$$

$$u_i\big|_{t=0} = b_i(x_1, x_2), \qquad b_i\big|_S = \psi_i\big|_{t=0}; \qquad p\big|_{t=0} = q(x_1, x_2), \qquad \left.\frac{\partial q}{\partial \overline{n}}\right|_{S_{нор}} = g(s)\big|_{t=0}, \qquad q\big|_{S_4} = p_a, \tag{4}$$

где $\left.\frac{\partial p}{\partial \overline{n}}\right|_{S_{нор}}$, $\left.\frac{\partial q}{\partial \overline{n}}\right|_{S_{нор}}$ – производные по направлению вектора $\overline{n}$ внутренней нормали к $S_{нор}$, p_a – константа (атмосферное давление).

Достоверные решения краевых задач для уравнений Навье – Стокса (1) – (2), как указывается в [4], удаётся практически получать лишь в диапазоне значений чисел Рейнольдса до 10^3. Однако в [5] были решены задачи при значениях чисел Рейнольдса от 8 000 до 30 000. Сравнение полученных решений с экспериментальными данными показало их прекрасное совпадение во всём рассматриваемом диапазоне 8 000 – 30 000 (числа Рейнольдса, большие 30 000, не участвовали в расчётах, поскольку отсутствовали соответствующие опытные данные). В связи со сказанным отметим, что при решении указанных выше задач применялось уравнение Пуассона для давления

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \tag{5}$$

а уравнение (2) рассматривалось в виде

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}=0, \tag{6}$$

причём решение последнего уравнения удовлетворяло уравнению (2) [2]. Уравнение Пуассона (5) встречается уже в [4], [6], а также в [7]. В работе [7] решаются разностное уравнение Пуассона для давления и разностные уравнения для компонент скорости u_1, u_2. В ней используется асимптотический метод установления, когда для установившихся течений решается нестационарная задача. При этом уравнение неразрывности рассматривается в виде (2) и в предложенном алгоритме скорость (u_1, u_2), которая рассчитывается на каждой итерации по времени, уже удовлетворяет уравнению (2); необходимо лишь осуществлять контроль за его выполнением. Это обстоятельство существенно отличает метод из [7] от других в лучшую сторону. И всё-таки указанный метод может работать только при малых числах Рейнольдса. В работе [7] отмечено, что предложенный в ней метод позволяет охватить диапазон изменения чисел Рейнольдса от 1 до 1 000. Метод же, содержащийся в [5], может работать при значениях чисел Рейнольдса до 30 000 и выше.

Из сказанного выше следует, что прежде, чем пытаться решать систему (1) – (4), необходимо понять, как работает в ней уравнение (2). Первый шаг в этом направлении был сделан в [8] где было отмечено, что указанное только что уравнение может переопределять краевую задачу для системы Навье – Стокса при числах Рейнольдса больших, чем 1 000. После этого был проведён анализ экспериментальных данных, содержащихся в классических монографиях по гидродинамике и многократно подтверждённых опытами [9].

Экспериментально установлено существование критического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}'_{кр}$, обладающего нижеуказанным свойством и названным в [9] ***нижним критическим числом Рейнольдса*** (далее – нижнее критическое число). Если возмущения течения непрерывно происходят у входа в трубу, то при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}'_{кр}$ (Re – число Рейнольдса) они непременно затухнут на некотором расстоянии от входа, сколь бы сильны они ни были. Напротив, при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}'_{кр}$ движение жидкости может стать турбулентным на всём протяжении трубы, причём для этого достаточны тем более слабые возмущения, чем больше число Рейнольдса [10]. Для трубы кругового сечения незатухающая турбулентность наблюдалась, начиная с $\mathrm{Re} \approx 2300$, а для течения между параллельными плоскостями – начиная с $\mathrm{Re} \approx 1000$. Однако при очень тщательном устранении возмущений у входа в трубу удаётся поддерживать течение, которое не переходит в турбулентный режим, до очень больших значений Re (фактически его удавалось наблюдать вплоть до $\mathrm{Re} \approx 10^5$) [3]. Отсюда следует: если мы рассматриваем трубу с гладким входом, то для неё число Рейнольдса, при котором течение фактически переходит в турбулентный режим (в [9] это число названо ***переходным критическим числом*** (***Рейнольдса***) и обозначено $\mathrm{Re}_{кр}$), может быть намного больше нижнего критического числа. Дальнейшее изложение будем проводить, сменив обозначения $\mathrm{Re}'_{кр}$ на $\mathrm{Re}_{ниж}$, а $\mathrm{Re}_{кр}$ на $\mathrm{Re}_{пер}$ и считая интервал $(\mathrm{Re}_{ниж}, \mathrm{Re}_{пер})$ достаточно большим.

Будем рассматривать движение вязкой несжимаемой жидкости при наличии градиента давления в направлении оси Ox_1 между двумя неподвижными параллельными пластинами (твёрдыми стенками), расположенными в плоскостях $x_2 = \pm h$ (течение сквозь плоскую трубу). При этом считаем, что h, ν, η являются постоянными (ν численно равна η).

Предположим, что течение происходит только в направлении оси Ox_1, т. е. лишь продольная скорость u_1 является ненулевой, а поперечная скорость равна нулю $u_2 = 0$. При таком предположении уравнения (1) существенно упрощаются и дают $\nu \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = \dfrac{\partial p}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial p}{\partial x_2} = 0$ (для проводимых рассуждений нет необходимости в методе установления и далее рассматривается стационарное течение). В результате несложных рассуждений из последних уравнений получаем $\frac{dp}{dx_1}=const$[10]. Решая после этого уравнение $\nu\frac{d^2u_1}{dx_2^2}=\frac{dp}{dx_1}$ с граничными условиями $u_1|_{x_2=\pm h}=0$, находим

$$u_1=-\frac{h^2}{2\nu}\cdot\frac{dp}{dx_1}\cdot\left(1-\frac{x_2^2}{h^2}\right),$$

(7)

где давление p зависит только от x_1, $\frac{dp}{dx_1}=const$, скорость (7) изменяется только в направлении оси Ox_2 [3]. Течение, описываемое уравнением (7), называют плоским течением Пуазейля. Оно имеет место после прохождения жидкостью так называемого «начального участка» при числах Рейнольдса не больших, чем 1 000 [7]. Производная продольной скорости, найденная из (7), может быть записана так:

$$\frac{du_1}{dx_2}=\frac{1}{\nu}\frac{dp}{dx_1}x_2=\frac{1}{\eta}\cdot\frac{dp}{dx_1}\cdot x_2$$

(8)

($\rho=1,\eta$ численно равна ν), вязкое напряжение τ определяется законом вязкого трения Ньютона (продольная скорость изменяется только в направлении оси Ox_2) $\tau=\eta\frac{du_1}{dx_2}$ и с учётом (8) может быть записана в виде $\tau=\frac{dp}{dx_1}x_2$.

Поскольку производная давления отрицательна, производная скорости u_1 и координата x_2 меняют знаки (твёрдые стенки лежат в плоскостях $x_2=\pm h$, на которых скорость $u_1=0$), а нас будет интересовать лишь абсолютная величина вязкого напряжения, то будем рассматривать $|\tau|$.

Введём следующие характерные величины: l – геометрический размер, например, $2h$ (расстояние между пластинами); u_0 – скорость, например, значение скорости u_1 на оси трубы, т.е. величину этой скорости при $x_2=0$, которую обозначим U и которая равна $u_0 = U = \frac{h^2}{2\nu} \cdot \left(-\frac{dp}{dx_1} \right)$. Тогда число Рейнольдса будет представляться выражением

$$\mathrm{Re} = \frac{lu_0}{\nu} = \frac{2hU}{\nu} = \frac{h^3}{\nu^2} \left| \frac{dp}{dx_1} \right|$$

(9)

(чаще в определении числа Рейнольдса используется средняя скорость; тогда $\mathrm{Re} = \frac{2h^3}{3\nu^2} \left| \frac{dp}{dx_1} \right|$).

Примем некоторые обозначения, которые потребуются ниже. Чтобы иметь возможность сравнивать силы возмущений по величине, введём термин «сила возмущения» F; чтобы сравнивать вязкие напряжения, обозначим

$$|\tau| = \left| \eta \frac{du_1}{dx_2} \right| = \left| \frac{dp}{dx_1} x_2 \right| = f \, .$$

(10)

Обозначения: $4\delta = \mathrm{Re}_{пер} - \mathrm{Re}_{ниж}$, $\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_{ниж} + \delta$, $\mathrm{Re}_2 = \mathrm{Re}_{ниж} + 2\delta$, $\mathrm{Re}_3 = \mathrm{Re}_{ниж} + 3\delta$. Тогда $\mathrm{Re}_{пер} = \mathrm{Re}_{ниж} + 4\delta$,

$$\mathrm{Re}_{ниж} < \mathrm{Re}_1 < \mathrm{Re}_2 < \mathrm{Re}_3 < \mathrm{Re}_{пер} \qquad (\delta > 0)\, .$$

(11)

Вспомним, что $\mathrm{Re}_{пер}$ есть значение числа Рейнольдса, при котором течение фактически переходит в турбулентный режим. Это значение определяется возмущениями течения, создаваемыми самой трубой, и более всего зависит от состояния входа в трубу. Очевидно следующее: специально создавая дополнительные возмущения на входе трубы (ухудшая гладкость входа), мы добьёмся перехода течения в турбулентный режим при некотором Re, которое меньше, чем $\mathrm{Re}_{пер}$, определяемое трубой при отсутствии дополнительных возмущений.

Вспомним также, что выше было сказано о сильных и более слабых возмущениях у входа в трубу.

Т е о р е м а 1. *Течение в трубе при значениях числа Рейнольдса, удовлетворяющих неравенствам* $\mathrm{Re}_{ниж} < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{пер}$ *, не являющееся турбулентным, не может быть течением Пуазейля, описываемым формулой* (7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Диссипация (рассеяние) механической энергии происходит за счёт той части работы внутренних сил, которая определяется вязкостью [3]. В [10] получена формула для диссипации энергии в несжимаемой жидкости.

$$E'_{кин} = -\frac{\eta}{2}\int\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 dV\,,$$

(12)

где интегрирование выполняется по всему объёму жидкости. Формула (12) для течения (7) после интегрирования имеет вид [9]

$$E'_{кин} = -\frac{4Lh^3}{3\eta}\cdot\left(\frac{dp}{dx_1}\right)^2.$$

(13)

При интегрировании учитывалось следующее замечание. Изучаемое движение можно рассматривать как течение сквозь трубу прямоугольного сечения, если представить, что жидкость заключена ещё между двумя воображаемыми плоскостями $x_3 = \pm 0.5$, расположенными на расстоянии 1 друг от друга, по которым она свободно скользит, не испытывая сопротивления трения [11].

Поскольку $E'_{кин} < 0$, то ниже рассматриваем $|E'_{кин}|$. Диссипация приводит к уменьшению полной кинетической энергии движущейся жидкости [10], т. е. чем больше $|E'_{кин}|$, тем быстрее затухнут возмущения в потоке. Другими словами, большая по модулю диссипация подавляет большие по силе возмущения. Обозначим величины f и $|E'_{кин}|$ символами f_1, f_2, f_3; $|E'_{кин}|_1, |E'_{кин}|_2, |E'_{кин}|_3$, поставив эти символы в указанном порядке в соответствие с величинами $\mathrm{Re}_1, \mathrm{Re}_2, \mathrm{Re}_3$.

Рассмотрим течение, происходящее при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_1$ (назовём его течением 1), и начнём искусственно возмущать его на входе, постепенно увеличивая силу возмущений. Пусть течение становится турбулентным в момент достижения этой силы значения F_1. Теперь начнём возмущать течение, происходящее при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_2$ (течение 2), повторяя то же самое возмущение с постепенным увеличением его силы. Пусть течение переходит в турбулентный режим в момент достижения силы значения F_2. Заметим, что $F_2 < F_1$, т. к. $\mathrm{Re}_2 > \mathrm{Re}_1$ (для перехода течения, не являющегося турбулентным, в турбулентное достаточны тем более слабые возмущения, чем больше число Рейнольдса).

Повторим то же самое, рассматривая течение при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_3$ (течение 3). Получим $F_3 < F_2$.

Наше рассмотрение привело к следующему. При силе возмущения F_2 течение 1 не является турбулентным, течение 3 является. Значит, справедливы неравенства $f_1 > f_3, |E'_{кин}|_1 > |E'_{кин}|_3$, в которых f отвечает истинным вязким напряжениям, а $E'_{кин}$ – формуле (12) (это показывают данные экспериментов). Если же предположить, что в промежутке $\mathrm{Re}_{ниж} < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{пер}$ течение описывается формулой (7), то получим $f_1 < f_3, |E'_{кин}|_1 < |E'_{кин}|_3$, где f отвечает формулам (10), а $E'_{кин}$ – формуле (13) (см. (9) – (11) и (13)), что противоречит эксперименту . Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. *Назовём «**процессом турбулизации**» вязкого течения такой процесс изменения его структуры, который сопровождается уменьшением сопротивляемости потока переходу в турбулентный режим.*

Т е о р е м а 2. *При изменении числа Рейнольдса от значения* $\mathrm{Re}_{ниж}$ *до значения* $\mathrm{Re}_{пер}$ *имеет место «процесс турбулизации» потока.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выше показано, что истинное вязкое напряжение потока при $\mathrm{Re}_{ниж} < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{пер}$ не является напряжением плоского течения Пуазейля. Обратим внимание на тот факт, что в рамках пуазейлевого течения с ростом числа Рейнольдса модуль вязкого напряжения возрастает (h, ν, η, L рассматриваются постоянными), причём самое большое значение, по абсолютной величине, он принимает на твёрдых стенках при $x_2 = \pm h$. Значит, при возрастании числа Re, в момент его перехода через значение $\mathrm{Re}_{ниж}$, вязкого напряжения становится достаточно для появления ненулевой поперечной скорости u_2. Последнее означает, что пристеночные слои жидкости, имеющие малые продольные скорости, смещаются в сторону слоёв, двигающихся с большими скоростями, и тормозят их движение. В результате эти более скоростные слои теряют скорость и переносят в единицу времени меньшую массу жидкости, чем переносили до торможения. Отсюда следует, поскольку через произвольное поперечное сечение трубы за определённый промежуток времени должна пройти определённая, одна и та же, масса жидкости, что в другой области течения слои жидкости увеличивают скорость (закон сохранения массы). Понятно также следующее: увеличат свои скорости слои в области, где было самое малое вязкое напряжение течения (7), т. е. вблизи оси трубы. Это приведёт к образованию малой околоосевой области, в которой скорость постоянна в направлении поперёк трубы, что означает: в названной области $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0$ и, следовательно, согласно (9), равна нулю и абсолютная величина вязкого напряжения (после того, как течение перестало быть течением (7), производные продольной и поперечной скоростей являются частными).

Как уже было сказано, значение переходного числа Рейнольдса (при отсутствии специально создаваемых возмущений) главным образом зависит от состояния входа в трубу, более точно, от гладкости твёрдых стенок на входе. Сопоставим следующие факты: возмущения возникают на твёрдой поверхности входа; они, естественно, тем меньше, чем более гладкие стенки на входе;

для перехода течения в турбулентный режим достаточны тем более слабые возмущения, чем больше Re; абсолютная величина вязкого напряжения равна нулю в указанной выше околоосевой области. Из сопоставления следует: во время возрастания числа Рейнольдса от значения $\mathrm{Re}_{ниж}$ до значения $\mathrm{Re}_{пер}$ околоосевая область, в которой $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0$, увеличивается, т. е. область течения, в которой возмущения не могут быть подавлены, расширяется, что и есть процесс турбулизации течения. Теорема доказана.

В ы в о д ы. При числах Рейнольдса из промежутка $\mathrm{Re}_{ниж} < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{пер}$ существует ненулевая поперечная скорость, продольная скорость перестаёт зависеть только от координаты x_2, а уравнение неразрывности не выполняется автоматически и требует решения.

Эти выводы подтверждены численным экспериментом, результаты которого содержатся в [5].

Литература

1. Ладыженская О.А. О новых уравнениях для описания движений вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач. – Труды МИ АН СССР, 1967, том 102, с. 85-104.
2. Каянович С.С. Математические вопросы двухмерной гидродинамики. Минск, 2024. 432 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Москва, Наука, 1973. 848 с.
4. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. Москва, Наука, 1984. 285 с.
5. Каянович С.С. Численное моделирование в теории смазки. Кт. физ.-мат. наук дисс. Минск, 1988. 175 с.
6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. Москва, Мир, 1980. 616 с.

7. Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Е.И., Розумнюк Н.В.. Метод численного решения уравнений Навье – Стокса в переменных скорость-давление = Прикладная гидромеханика, 2008, том 10, № 2, с. 13-23.
8. Каянович С.С. Уравнения Навье – Стокса и парадоксы вязкой несжимаемой жидкости. Труды БГТУ, физ.-мат. науки, 1995, выпуск 2, серия 5, с. 49-55.
9. Kayanovich S. Flows of viscous Liquid at various Reynolds numbers. Materials of International University Scientific Forum “Practice Oriented Science: UAE – RUSSIA – INDIA”. Dubai, 2024, pp. 151-161.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Москва, Наука, 1988. 733 с.
11. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. Москва, Наука, 1964. 656 с.