

Баянов Евгений Викторович, канд. физ.-мат. наук, зав. каф.
Инженерной графики Новосибирского государственного технического
университета

Леонтьев Ярослав, студент Новосибирского государственного
технического университета

ТЕССЕРАКТ КАК ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ МНОГОМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация. В работе представлен комплексный анализ тессеракта — четырёхмерного гиперкуба как фундаментального объекта многомерной геометрии. Исследование охватывает математическое описание, геометрические свойства, методы визуализации и практические применения тессеракта в современной науке. Особое внимание уделяется различным способам проекции четырёхмерного объекта на трёхмерное пространство и их применению в компьютерной визуализации.

Практическая значимость работы заключается в демонстрации широкого спектра применений тессеракта в современных технологиях: от компьютерной графики и машинного обучения до квантовых вычислений и криптографии.

Описание гиперкуба представляет интерес для математиков, физиков, специалистов в области компьютерных наук и всех, кто интересуется проблемами многомерной геометрии и её приложениями в современной науке и технологиях.

Ключевые слова: тессеракт, гиперкуб, многомерная геометрия, четырёхмерное пространство, визуализация.

Введение

Тессеракт — это четырёхмерный гиперкуб, один из шести правильных политопов в четырёхмерном пространстве [1]. Как естественное обобщение трёхмерного куба на случай четырёх измерений, тессеракт является фундаментальным объектом изучения в многомерной геометрии и имеет важное значение для развития современной науки.

Британский математик Чарльз Говард Хинтон впервые представил тессеракт в своих книгах «Новая эра мысли» и «Четвёртое измерение» (1904). Этимология слова Тессеракт была источником некоторой путаницы. Хинтон первым написал слово *tessaract*. Это написание объединяет греческое слово *tessara*, означающее «четыре», с греческим словом *act*, означающим «лучи». Таким образом, *tessaract* может означать «четыре луча», имея в виду пространственные оси гиперкуба. Однако в «Четвёртом измерении» Хинтон написал слово *tesseract*, возможно, основываясь на латинском происхождении слова, поскольку латинское слово *tessera* означает «куб». Это написание является наиболее широко используемым сегодня.

Геометрию тессеракта понять непросто. Для понимания концепции полезно начать с более низких геометрических измерений. В геометрии нулевое измерение представлено точкой, не имеющей длины, ширины и высоты. В одномерной геометрии точка продлевается в одном направлении до другой точки, создавая отрезок прямой, имеющий длину, но не имеющий ширины и высоты. В двумерной геометрии отрезок прямой можно продлить под прямым углом к самому себе, образовав плоский квадрат с равной длиной и шириной, но без высоты. Плоский квадрат имеет четыре вершины и одну поверхность. В трехмерной геометрии плоский квадрат поднимается под прямым углом к самому себе, образуя куб с равной длиной, шириной и высотой. Куб имеет шесть граней и восемь вершин, которые определяют его трехмерный объем.

Описание и визуализация

С математической точки зрения тессеракт можно определить как выпуклую оболочку точек в четырёхмерном евклидовом пространстве [2]. Его основные характеристики включают:

- 16 вершин;
- 32 ребра;

- 24 квадратные грани;
- 8 кубических ячеек.

Группа симметрии тессеракта имеет порядок 384 и включает в себя: 96 вращений и 288 отражений [3].

Объём тессеракта (гиперобъём) вычисляется по формуле:

$$V_4=a^4,$$

где a — длина ребра. Это четырёхмерный аналог объёма, который можно представить как меру «четырёхмерного пространства», занимаемого тессерактом [4].

Визуализация тессеракта в трёхмерном пространстве осуществляется через различные проекции [5]:

Параллельное проецирование:

- Представляет тессеракт в виде двух кубов;
- Кубы соединены рёбрами;
- Позволяет увидеть структуру связей между элементами.

Центральное проецирование:

- Отображается в виде ромбододекаэдра;
- Сохраняет симметрию оригинала;
- Демонстрирует перспективу четырёхмерного объекта.

Тессеракт тесно связан с другими многомерными фигурами [6]:

- Является двойственным к 16-ячейке;
- Служит основой для построения других политопов;
- Связан с гиперсферой в четырёхмерном пространстве.

Построение гиперкуба можно представить следующим образом:

- 1-мерное пространство: две точки А и В можно соединить в линию, получив новый отрезок АВ.
- 2-мерное пространство: два параллельных отрезка АВ и CD можно соединить, получив квадрат с углами, обозначенными как ABCD.

- 3-мерное пространство: два параллельных квадрата ABCD и EFGH можно соединить, получив куб с углами, обозначенными как ABCDEFGH.
- 4-мерное пространство: два параллельных куба ABCDEFGH и IJKLMNOP можно соединить, получив гиперкуб с углами, обозначенными как ABCDEFGHIJKLMNOP.

Области применения

Тессеракт находит применение в различных областях науки и технологии.

1. Физика:

- Моделирование пространства-времени [7];
- Изучение свойств четырёхмерных многообразий;
- Исследование топологических дефектов;

2. Информатика:

- Алгоритмы многомерной классификации [8];
- Методы сжатия данных;
- Нейронные сети высокой размерности;
- Машинное обучение;
- Обработка больших данных.

3. Квантовая механика:

- Описание состояний квантовых систем [9];
- Изучение запутанности;
- Моделирование многочастичных систем;
- Квантовые вычисления;
- Квантовая криптография.

4. Теория струн:

- Построение многомерных пространств [10];
- Компактификация дополнительных измерений;
- Исследование бранов;

- М-теория;
- Дуальности струн.

В настоящее время активно изучаются [11]:

- Топологические свойства тессеракта;
- Новые методы визуализации;
- Приложения в квантовых вычислениях;
- Связь с теорией информации;
- Математические модели многомерных пространств.

Современные методы визуализации тессеракта включают [12]:

- Анимационные проекции;
- Виртуальная реальность;
- Дополненная реальность;
- Интерактивные 3D-модели;
- Фрактальные представления.

Практическое применение тессеракта охватывает:

- Компьютерную графику и визуализацию данных [13];
- Машинное обучение и искусственный интеллект [14];
- Теорию кодирования и передачи информации [15];
- Фундаментальные исследования в физике [16];
- Параллельные вычисления [17];
- Оптимизации сетевых топологий [18];
- Разработки новых алгоритмов сжатия данных [19];
- Создания эффективных систем хранения информации [20];
- Моделирования сложных физических процессов [21];
- Развития квантовых технологий [22].

Заключение

Несмотря на свою теоретическую и культурную значимость, тессеракт остаётся абстрактным объектом, который невозможно непосредственно наблюдать или построить в трёхмерном мире. Это ограничивает его практическое применение, но стимулирует развитие новых методов визуализации и математического моделирования. Исследования в области многомерной геометрии продолжают развиваться, и тессеракт остаётся ключевым объектом для изучения свойств высших измерений.

Будущие исследования могут сосредоточиться на применении тессеракта в квантовых вычислениях, где многомерные структуры могут улучшить алгоритмы, или в визуализации данных, где гиперкубы помогают анализировать сложные системы. Кроме того, тессеракт продолжает вдохновлять междисциплинарные проекты, объединяющие математику, искусство и технологии.

Тессеракт — это не просто геометрическая фигура, но и символ человеческого стремления к пониманию сложных и невидимых аспектов вселенной. Его изучение расширяет границы математики, физики и информатики, а также вдохновляет творчество в искусстве и литературе. Несмотря на трудности визуализации и ограничения восприятия, тессеракт остаётся мощным инструментом для исследования многомерных пространств и их приложений. По мере развития технологий и науки тессеракт, вероятно, продолжит играть важную роль в теоретических и практических исследованиях, а также в популяризации науки.

Список литературы

1. Coxeter H.S.M. Regular Polytopes. — Dover Publications, 1973.
2. Hinton C.H. A New Era of Thought. — Kessinger Publishing, 2003.
3. Conway J.H., Smith D.W. On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry. — A.K. Peters, 2003.
4. Tipton R.J. The Fourth Dimension Simply Explained. — Dover Publications, 1980.

5. Pickover C.A. *The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics*. — Sterling Publishing, 2009.
6. Du Val P. *Homographies, Quaternions and Rotations*. — Oxford University Press, 1964.
7. Hawking S. *The Theory of Everything: The Origin and Fate of the Universe*. — Phoenix Books, 2002.
8. Cover T.M., Thomas J.A. *Elements of Information Theory*. — Wiley-Interscience, 2006.
9. Nielsen M.A., Chuang I.L. *Quantum Computation and Quantum Information*. — Cambridge University Press, 2010.
10. Greene B. *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory*. — Vintage, 2000.
11. Penrose R. *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. — Vintage Books, 2005.
12. Fuchs C.A., Peres A. *Quantum Theory as a Quantum Information Theory*. — Physics Today, 2005.
13. Foley J.D., van Dam A., Feiner S.K., Hughes J.F. *Computer Graphics: Principles and Practice*. — Addison-Wesley, 1990.
14. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. *Deep Learning*. — MIT Press, 2016.
15. Shannon C.E. *A Mathematical Theory of Communication*. — Bell System Technical Journal, 1948.
16. Weinberg S. *The Quantum Theory of Fields*. — Cambridge University Press, 1995.
17. Valiant L.G. *Why is Boolean Circuit Complexity Advancing so Slowly?* — In: *Computational Complexity Theory*. American Mathematical Society, 2004.
18. Tanenbaum A.S. *Computer Networks*. — Prentice Hall, 2010.
19. Sayood K. *Introduction to Data Compression*. — Morgan Kaufmann, 2012.

20. Patterson D.A., Hennessy J.L. Computer Organization and Design. — Morgan Kaufmann, 2013.
21. Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of Theoretical Physics. — Butterworth-Heinemann, 1976.
22. Nielson M.A., Chuang I.L. Quantum Computation and Quantum Information. — Cambridge University Press, 2011.