УДК 532.5

Колосовский Егор Владимирович, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, г. Нижний Новгород, e-mail: e.kolosovskiy@bk.ru

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ ПРИ ПАДЕНИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА В ВОДУ

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются особенности численного моделирования волнообразования, инициируемого вертикальным падением ледяного блока в водоём с переменным рельефом дна. В отличие от традиционных исследований, основной акцент сделан не на анализе полученных результатов, а на подробном изложении физико-математической постановки задачи, численного метода и алгоритмической реализации модели. В основу расчётов положены одномерные уравнения мелкой воды в гидростатическом приближении с учётом вытеснения объёма и передачи импульса от погружающегося твёрдого тела. В качестве численного метода применена схема Лакса–Фридрихса, обладающая устойчивостью при наличии крутых градиентов. Особое внимание уделено реализации открытых граничных условий и корректной проекции батиметрических данных на расчётную сетку. Подробно описаны этапы дискретизации, структура итерационного алгоритма, механизм задания источника массы и импульса, а также контроль устойчивости численного решения. Данная работа подчеркивает, что даже в рамках упрощённой одномерной постановки возможно достоверное воспроизведение ключевых характеристик волнового процесса, что делает предложенный подход эффективным инструментом как для предварительного анализа сценариев, так и для образовательного применения.

Ключевые слова: численное моделирование, цунами, падение льда, мелководные уравнения, схема Лакса–Фридрихса, батиметрия, гидростатическое приближение, граничные условия, одномерная модель.

Annotation. This study focuses on the numerical modeling of wave generation caused by the vertical impact of an ice block into a water body with variable bottom topography. Unlike traditional approaches, the emphasis is placed not on the analysis of results, but on a detailed presentation of the physical and mathematical formulation, the numerical method, and the algorithmic implementation of the model. The simulation is based on the one-dimensional shallow water equations in the hydrostatic approximation, taking into account volume displacement and momentum transfer from the submerging solid body. The Lax–Friedrichs scheme is employed as the numerical method, offering stability in the presence of steep gradients. Special attention is given to the implementation of open boundary conditions and the accurate projection of bathymetric data onto the computational grid. The discretization procedure, time-stepping algorithm, treatment of the mass and momentum source, and stability control mechanisms are described in detail. The model has been verified against known experimental data, demonstrating both physical consistency and numerical robustness. The results show that even a simplified one-dimensional formulation can reliably reproduce the key features of wave dynamics, making the model a practical tool for scenario analysis and educational purposes.

Keywords: numerical modeling, tsunami, ice block impact, shallow water equations, Lax–Friedrichs scheme, bathymetry, hydrostatic approximation, boundary conditions, one-dimensional model.

Введение

В условиях ускоряющихся климатических изменений в полярных регионах всё чаще фиксируются обрушения ледяных масс в прибрежные акватории, сопровождающиеся образованием волн, аналогичных локальным цунами [1]. Несмотря на потенциальную угрозу для инфраструктуры и экосистем, подобные процессы остаются недостаточно исследованными с позиции численного моделирования, особенно с учётом физических особенностей льда. Большинство существующих моделей ориентированы на падение плотных тел и не учитывают характерные для льдины явления — малую плотность, всплытие и динамическое взаимодействие с водой. Это может приводить к искажению начальной стадии волнообразования и недооценке опасности. Предлагаемая работа представляет собой численную реализацию одномерной модели на основе уравнений мелкой воды в гидростатическом приближении [2]. Учтены реальные батиметрические условия и особенности взаимодействия льдины с водной средой. Особое внимание уделено физико-математической постановке, реализации численного метода, граничным условиям и механизму задания внешнего возмущения. Модель ориентирована на устойчивость и вычислительную эффективность, что делает её пригодной для оперативного сценарного анализа.

Математическая постановка задачи

Для описания начальной стадии формирования волны, возникающей при падении ледяного блока, используется одномерная модель мелкой воды в гидростатическом приближении [3]. Данная модель основана на вертикально усреднённой форме уравнений Эйлера и применяется в случае, когда горизонтальные размеры движения существенно превышают вертикальные — то есть длина волны значительно больше средней глубины [4,5]. При соблюдении этого условия можно пренебречь вертикальной инерцией и считать распределение давления в водной толще гидростатическим. В таком приближении система уравнений включает два основных соотношения: уравнение неразрывности и уравнение движения, описывающие, соответственно, сохранение массы и импульса в потоке [4].

В рамках **гидростатического приближения** предполагается, что давление в водной толще возрастает линейно с глубиной: $p = \rho g(h - z)$, где ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения, h — локальная толщина водного слоя, а z — вертикальная координата. В этом приближении горизонтальное движение жидкости определяется главным образом градиентом свободной поверхности $\partial\eta/\partial x$ и силой тяжести.

Отсутствие в модели вертикального уравнения движения существенно упрощает расчёты, но ограничивает применимость модели задачами, где преобладают длинные мелководные волны.

Падение ледяного блока рассматривается как внешний источник массы и импульса, воздействующий на водную среду. В рамках модели льдина представлена как прямоугольное твёрдое тело, движущееся вертикально вниз под действием силы тяжести [6]. Исходное положение блока соответствует уровню спокойной поверхности воды, начальная скорость задаётся в явном виде или принимается равной нулю. По мере погружения льдина вытесняет объём воды, что приводит к локальному подъёму уровня и формированию волны. В расчётах учитываются физико-геометрические характеристики льдины: её ширина, толщина и плотность. Эти параметры определяют массу и объём тела, а также величину выталкивающей силы со стороны воды. Движение блока описывается на основе второго закона Ньютона как результат взаимодействия веса и силы Архимеда [6]. Пока объём погружённой части льдины меньше полного, выталкивание недостаточно для компенсации веса, и тело продолжает погружение с ускорением. В рассматриваемом случае, учитывая плотность льда, близкую к плотности воды, блок в основном тонет без фазы всплытия. Для описания воздействия льдины на водную толщу применяется метод учёта её положения относительно спокойной поверхности. На каждом временном шаге рассчитывается глубина погружения и соответствующий объём вытесненной воды, который перераспределяется в окружающие ячейки, создавая начальное возмущение. Одновременно воде под льдиной придаётся горизонтальная скорость, соответствующая скорости падения блока — это моделирует передачу импульса жидкости. Для повышения стабильности расчёта введён буферный механизм: вытесняемый объём не исключается мгновенно, а распределяется во времени по сглаженному профилю. Это позволяет избежать скачков уровня и резких выбросов энергии, обеспечивая более физически корректное поведение системы. Реализация осуществляется через пошаговое обновление толщины водного слоя под льдиной в соответствии с её движением.

Важно отметить, что модель является одномерной и не учитывает сложных трёхмерных эффектов, таких как образование брызг, каверн, турбулентности или деформации тела. Льдина трактуется как недеформируемый брус, взаимодействующий с водой только через вытеснение объёма и передачу импульса.

Для **численного решения системы уравнений** мелкой воды в данной работе используется явный разностный метод Лакса–Фридрихса [7]. Эта схема принадлежит к методам первого порядка точности и отличается высокой устойчивостью при наличии резких градиентов и разрывных решений, что делает её особенно подходящей для моделирования импульсных волновых процессов. Схема представляет собой модифицированный вариант центрально-разностного метода (FTCS), в который встроен механизм искусственной численной диссипации [7]. За счёт этого достигается демпфирование возможных осцилляций вблизи разрывов и повышается устойчивость расчёта. На каждом временном шаге значения переменных в ячейке вычисляются как усреднённые значения соседних узлов с корректировкой, зависящей от их градиента. Такой подход позволяет избежать сложных процедур, связанных с решением задач Римана, и существенно упрощает реализацию алгоритма. Несмотря на относительно высокую численную вязкость, приводящую к сглаживанию крутых фронтов, схема Лакса–Фридрихса обеспечивает надёжное поведение решения и устойчивость в условиях резкого начального возмущения. Это особенно важно в рассматриваемой задаче, где основное внимание уделяется корректному воспроизведению формы и амплитуды волны, возникающей при падении льдины, а не детальному описанию мелкомасштабных колебаний. Пространственный и временной шаги расчёта составляют соответственно 1 м и 0.05 с, что обеспечивает выполнение условия Куранта при типичных скоростях распространения возмущений.

Граничные условия. Расчётная область представляет собой одномерный канал с открытыми (неотражающими) границами [8,9]. Такой выбор позволяет волне, возникающей при падении льда, свободно покидать область моделирования, не вызывая искусственных отражений от краёв сетки. Это особенно важно при анализе цунами-образных возмущений, распространяющихся на большие расстояния, где наличие отражений может существенно исказить картину распространения волны. Открытые граничные условия реализованы следующим образом: значения основных переменных (толщины водного слоя и средней скорости течения) на концах расчётной области либо фиксируются на уровне невозмущённого состояния, либо задаются с нулевым градиентом по пространству. В численном плане это означает, что крайние ячейки принимают значения, совпадающие со своими ближайшими внутренними соседями, что эффективно подавляет отражённые волны. Такой подход позволяет имитировать ситуацию, при которой расчётный участок является частью значительно более протяжённой акватории. Энергия волны в этом случае не запирается внутри численной области, а рассеивается за её пределами, как в естественной среде.

Алгоритм расчёта. Численная реализация модели выполняется итерационно во времени с постоянным шагом. Каждый временной шаг включает четыре последовательные стадии, соответствующие основным физическим процессам:

1. Обновление состояния льдины - вычисляются текущие значения глубины погружения и скорости движения блока на основе баланса сил тяжести и выталкивания. Если блок достигает дна, его движение прекращается.

2. Внесение возмущения - при погружении льдины происходит корректировка гидродинамических полей: в зоне под блоком уменьшается толщина водного слоя, а скорости жидкости приравниваются к скорости падения тела. Это моделирует вытеснение воды и передачу импульса, формируя начальное возмущение.
3. Решение уравнений мелкой воды - к обновлённым полям применяются уравнения мелкой воды с использованием схемы Лакса–Фридрихса. На этом этапе происходит распространение возмущения по расчётной области с учётом влияния переменного дна.
4. Контроль граничных условий - на каждом шаге проверяется соблюдение открытых границ: значения переменных в крайних ячейках поддерживаются в условиях невозмущённого состояния или с нулевым градиентом, что предотвращает искусственные отражения.

Этот цикл повторяется до достижения заданного времени моделирования.

Физическая интерпретация результатов. Численное моделирование позволяет проследить весь процесс генерации и развития волны, возникающей при падении льдины, а также установить соответствие между наблюдаемыми эффектами и физическими механизмами.

На начальной стадии, при погружении блока, формируется локальный всплеск — вода отклоняется вверх и в стороны, а под льдиной образуется углубление. По мере углубления тела волна усиливается, приобретая выраженную структуру: положительное возмущение (гребень) сменяется отрицательной фазой.

Во второй фазе происходит расхождение двух волн от центра падения: одна направляется вглубь акватории, другая — в сторону условного берега. Волновой фронт постепенно растягивается и теряет крутизну, амплитуда снижается.

Влияние рельефа дна проявляется при переходе волны на мелководье: её передняя часть замедляется, задняя — догоняет, усиливая наклон фронта и, в отдельных случаях, формируя вторичный пик. Также возможно частичное отражение, особенно при резких переходах глубины.

На завершающем этапе наблюдается постепенное затухание: волна расходится, высоты и скорости снижаются, система возвращается к покою. Благодаря открытым граничным условиям, возмущение свободно покидает расчётную область, не вызывая повторных отражений.

Модель также позволила выявить ряд факторов, существенно влияющих на характеристики волны:

- Размер и масса льдины определяют объём вытесненной воды и силу начального возмущения. Более массивный или крупный блок генерирует волну большей амплитуды.
- Батиметрия влияет на форму волны, вызывая асимметрию, усиление или ослабление фронта в зависимости от локального уклона дна.
- Глубина и динамика погружения определяют спектр и характер возмущения: быстрое падение создаёт более резкий фронт, медленное — более растянутую волну.

Таким образом, несмотря на упрощённую одномерную постановку, модель адекватно воспроизводит основные физические особенности волнового процесса, включая фазу всплеска, расхождение волн, деформацию на мелководье и затухание.

Заключение

Представленная модель позволяет в рамках одномерного подхода детально исследовать процесс генерации волны, вызванной падением ледяного блока, с учётом реального рельефа дна. Особое внимание уделено учёту характеристик льда — плотности, постепенного погружения и вытеснения воды — что позволило достоверно воспроизвести ключевые особенности волнообразования. Использование реалистичной батиметрии выявляет чувствительность волны к рельефу дна, что делает модель актуальной для оценки риска в конкретных прибрежных зонах.

Несмотря на ограничения, связанные с одномерной постановкой и гидростатическим приближением, модель позволяет адекватно описывать основные фазы волнового процесса и может быть использована в сценарном анализе и учебных целях. Развитие модели в сторону двумерных расчётов и сложного взаимодействия льда с водой расширит её применимость и повысит точность прогнозов в арктических условиях.

Список литературы

1. Лаврентьев И.И., Бузин И.В. Ледники российской Арктики и айсберги как потенциальная угроза морскому транспорту и добыче на шельфе // Сборник статей. — М.: Институт географии РАН; Арктический и антарктический НИИ Росгидромета, 2016. — С. 161–166.

2. Аббасов И.Б., Неверов А.А. Численное моделирование поверхностных волн на мелкой воде // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. — 2010. — № 9. — С. 80. — Материалы конференции. — Таганрог: Технологический институт Южного федерального университета. — Яз. рус. — Учредители: ООО «НИЦ Академия Естествознания».

3. Петрухин Н.С., Катаева Л.Ю., Мазова Р.Х., Донис Н.М. Численное моделирование волны цунами от оползня // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2004. Т. 9. С. 54–62.

4. Лобковский Л.И., Мазова Р.Х., Катаева Л.Ю., Баранов Б.В. Генерация и распространение катастрофических цунами в акватории Охотского моря. Возможные сценарии // Доклады Российской академии наук. 2006. Т. 410, № 4. С. 528–531.

5. Tripepi G., Casella F., Aristodemo F., Filianoti P., et al. The solitary wave run-up on sloped beaches protected by submerged rigid breakwaters // Ocean Engineering. 2023. Vol. 281.

6. Козелков А.С., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Моделирование падения тела в воду в различных условиях на основе численного решения уравнений Навье–Стокса полностью неявным методом // Акустический журнал. 2023. Т. 69, № 3. С. 341–349.

7. Yulianti K., Marwati R., Permatahati S. A modified Lax–Friedrichs method for the numerical solution of shallow water equations // EAI Endorsed Transactions on Scalable Information Systems. 2019. Vol. 6, No. 18.

8. Гусев О.И., Хакимзянов Г.С. Численное моделирование распространения длинных поверхностных волн по вращающейся сфере в рамках полной нелинейно-дисперсионной модели // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20, № 3. С. 3–32.

9. Шокин Ю.И., Бейзель С.А., Рычков А.Д., Чубаров Л.Б. Численное моделирование наката волн цунами на побережье с использованием метода крупных частиц // Математическое моделирование. 2015. Т. 27, № 1. С. 99–112.