

А.С. Злобин

кандидат технических наук, главный конструктор;

ПАО «ОДК-Кузнецов», Самара;

as.zlobin@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СРЕДНЕИНТЕГРАЛЬНЫХ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИН ВО ФРОНТЕ КОЛЬЦЕВЫХ ТРЕЩИН

Предложено уравнение для определения остаточных напряжений вблизи фронта кольцевых трещин, возникающих в упрочнённом слое осесимметричных деталей. Разработанный подход, в отличие от известных методов, позволяет существенно упростить, а при необходимости, и автоматизировать вычисление среднеинтегральных остаточных напряжений для кольцевых трещин различной глубины. Показано, что в свою очередь среднеинтегральные остаточные напряжения оказывают существенное влияние на КИН в окрестности фронта таких трещин. Предложено уравнение для численной оценки данного влияния. Полученный в результате исследования комплекс уравнений и зависимостей позволяет с минимальной трудоёмкостью оценивать влияние остаточных напряжений на КИН, а через него на характеристики сопротивления усталости деталей авиационной техники.

Ключевые слова: *остаточные напряжения, коэффициент интенсивности напряжений, сопротивление усталости, кольцевая трещина*

Остаточные напряжения, возникающие под воздействием конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов, оказывают

существенное влияние на характеристики сопротивления усталости деталей авиационной техники. При этом в работах [1, 2] показано, что многоцикловая и малоцикловая усталость зависят не только от величины остаточных напряжений $\sigma_{ост}$, но также от глубины a поверхностного слоя, в котором они действуют, и характера их распределения по этой глубине $\sigma_{ост} = f(y)$, где $y = [0; a]$. Таким образом, для корректного учёта влияния остаточных напряжений при оценке характеристик сопротивления усталости необходим комплексный параметр, учитывающий данные факторы.

Кафедрой сопротивления материалов Самарского университета на основе решения задачи [3] о перераспределении остаточных усилий после нанесения надреза полуэллиптического профиля на упрочнённую поверхность в качестве такого параметра были предложены [4, 5] среднеинтегральные остаточные напряжения $\bar{\sigma}_{ост}$. Это остаточные напряжения на дне трещины с точностью до постоянного коэффициента, зависящего от радиуса у дна трещины и её глубины.

На рисунке 1 схематично изображена кольцевая трещина в концентраторе осесимметричной детали. Здесь t – глубина трещины, y, z – координаты системы, начало которой совпадает с точкой, расположенной во фронте трещины при $t = 0$ (ось z направлена параллельно оси симметрии детали), $v = \arccos \frac{y}{t}$.

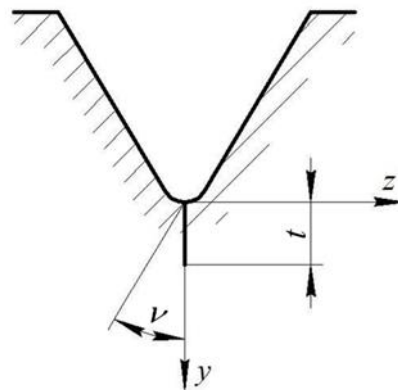


Рисунок 1 – Кольцевая трещина в осесимметричной детали

Зная исходное (до образования трещины), распределение остаточных напряжений $\sigma_{\text{ост}}(y)$ по глубине поверхностного слоя (в сечении $z = 0$), среднеинтегральные остаточные напряжения можно вычислить по формуле:

$$\bar{\sigma}_{\text{ост}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{\text{ост}}(v) dv. \quad (1)$$

Из изложенного следует, что главное преимущество среднеинтегральных остаточных напряжений перед другими параметрами заключается в том, что они являются комплексной характеристикой остаточных напряжений в вершине трещины, то есть учитывают их величину, глубину залегания и характер распределения. Таким образом, данный критерий удобно использовать для исследования влияния остаточных напряжений на характеристики сопротивления усталости.

1 Модифицированное уравнение для вычисления остаточных напряжений

В монографии [1] для вычисления интеграла (1) предлагается использовать формулу Симпсона:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{\text{ост}}(v) dv = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{6n} \left[\sigma_{\text{ост}0} + \sigma_{\text{ост}2n} + 2(\sigma_{\text{ост}2} + \sigma_{\text{ост}4} + \dots + \sigma_{\text{ост}2n-2}) + 4(\sigma_{\text{ост}1} + \sigma_{\text{ост}3} + \dots + \sigma_{\text{ост}2n-1}) \right]. \quad (2)$$

Диапазон $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ изменения угла v условно разделяется на чётное количество равных частей, границы которых обозначаются как v_j , где $j = 0, 1, \dots, 2n$. Величины $\sigma_{\text{ост}j}$ в формуле (2) – это остаточные напряжения, действующие на соответствующих глубинах поверхностного слоя $y_j = t \cdot \cos v_j$. Здесь стоит

отметить, что в рамках настоящей статьи необходимо различать понятия «глубина поверхностного слоя y » (на которой рассматриваются остаточные напряжения до образования трещины) и «глубина трещины t » (которая при вычислении $\bar{\sigma}_{\text{ост}}$ является постоянной величиной).

Использование формулы (2) не составляет больших затруднений, когда требуется вычислить среднеинтегральные остаточные напряжения для одной определённой глубины трещины. Однако, если необходимо оценить влияние глубины трещины на среднеинтегральные остаточные напряжения $\bar{\sigma}_{\text{ост}} = f(t)$ при одном и том же характере распределения $\sigma_{\text{ост}} = f(y)$, данный подход становится весьма трудоёмким, поскольку для каждой новой величины t необходимо каждый раз заново определять значения $2n$, v_j , y_j , и $\sigma_{\text{ост}j}$.

В работе [2] показано, что зависимость остаточных напряжений от глубины поверхностного слоя детали удобно представлять в виде полинома:

$$\sigma_{\text{ост}}(y) = \sum_{i=0}^k b_i \cdot y^i. \quad (3)$$

Выразив y через t и v , можно записать:

$$\sigma_{\text{ост}}(v) = \sum_{i=0}^k b_i \cdot (t \cdot \cos v)^i. \quad (4)$$

С учётом формулы (4) запишем выражение для вычисления среднеинтегральных напряжений в следующем виде:

$$\bar{\sigma}_{\text{ост}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{\text{ост}}(v) dv = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} b_i \cdot t^i \cdot \cos^i v dv = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{i=0}^k b_i \cdot t^i \cdot I_i, \quad (5)$$

где $I_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^i v dv$.

Коэффициенты b_i определяются с помощью аппроксимирования экспериментальных данных методом наименьших квадратов. В работе [2]

показано, что в большинстве случаев $k = 6$ обеспечивает достаточную точность аппроксимации. Определим значения I_i для $i = 0, 1, \dots, 6$:

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{=1}{\cos^0 v} dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2};$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1 v dv = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1;$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos 2v)}{2} dv = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2v d\left(\frac{2}{2}v\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv - \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2v d(2v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\underbrace{\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \underbrace{\sin(2 \cdot 0)}_{=0}\right) = \frac{\pi}{4};$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v \underbrace{\cos v dv}_{=d \sin v} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 v) d \sin v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d \sin v - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v d \sin v =$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \left(\frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 0\right) = (1 - 0) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 0\right) = \frac{2}{3};$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 v dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2v}{2}\right)^2 dv = \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \cdot \cos 2v + \cos^2 2v) dv =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv - \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2v d(2v) + \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2v dv = \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv - \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2v d(2v) + \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos 4v)}{2} dv =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv - \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2vd(2v) + \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv - \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4vd\left(\frac{4}{4}v\right) = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv - \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2vd(2v) + \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv - \frac{1}{32} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4vd(4v) = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\underbrace{\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \underbrace{\sin(2 \cdot 0)}_{=0}\right) + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{32} \cdot \left(\underbrace{\sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \underbrace{\sin(4 \cdot 0)}_{=0}\right) = \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 v dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 v \underbrace{\cos v}_{=d \sin v} dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 v)^2 d \sin v = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \cdot \sin^2 v + \sin^4 v)^2 d \sin v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d \sin v - 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v d \sin v + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 v d \sin v = \\
&= \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 0\right) + \left(\frac{1}{5} \sin^5 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{5} \sin^5 0\right) = \\
&= (1 - 0) - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0\right) + \left(\frac{1}{5} \cdot 1^5 - \frac{1}{5} \cdot 0\right) = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 v dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2v}{2}\right)^3 dv = \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 3 \cdot \cos 2v + 3 \cdot \cos^2 2v - \cos^3 2v) dv = \\
&= \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv - \frac{3}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2vdv + \frac{3}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2vdv - \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 2vdv = \\
&= \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv - \frac{3}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2vd\left(\frac{2}{2}v\right) + \frac{3}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos 4v)}{2} dv - \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2v \underbrace{\cos 2vd\left(\frac{2}{2}v\right)}_{=\frac{1}{2}d \sin 2v} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv - \frac{3}{16} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2vd(2v) + \frac{3}{16} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv - \frac{3}{16} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4vd \left(\frac{4}{4}v \right) - \\
&- \frac{1}{16} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 2v) d \sin 2v = \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv - \frac{3}{16} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2vd(2v) + \frac{3}{16} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv - \\
&- \frac{3}{64} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4vd(4v) - \frac{1}{16} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d \sin 2v + \frac{1}{16} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2vd \sin 2v = \\
&= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{3}{16} \cdot \left(\underbrace{\sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right)}_{=0} - \underbrace{\sin(2 \cdot 0)}_{=0} \right) + \frac{3}{16} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \\
&- \frac{3}{64} \cdot \left(\underbrace{\sin \left(4 \cdot \frac{\pi}{2} \right)}_{=0} - \underbrace{\sin(4 \cdot 0)}_{=0} \right) - \frac{1}{16} \cdot \left(\underbrace{\sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right)}_{=0} - \underbrace{\sin(2 \cdot 0)}_{=0} \right) + \\
&+ \frac{1}{16} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{3} \sin^3 \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right)}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \sin^3(2 \cdot 0)}_{=0} \right) = \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{32} = \frac{5\pi}{32}.
\end{aligned}$$

Для удобства представления сведём результаты вычисления интегралов I_i в таблицу 1.

Таблица 1 – Значения интегралов I_i

I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5\pi}{32}$

Используя данные таблицы 1, запишем формулу для определения зависимости среднеинтегральных остаточных напряжений от глубины трещины $\bar{\sigma}_{ост}(t)$ при известном исходном (до образования трещины) распределении остаточных напряжений по глубине поверхностного слоя (3):

$$\bar{\sigma}_{\text{ост}} = b_0 + \frac{2}{\pi} \cdot b_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot t^2 + \frac{4}{3\pi} \cdot b_3 \cdot t^3 + \frac{3}{8} \cdot b_4 \cdot t^4 + \frac{16}{15\pi} \cdot b_5 \cdot t^5 + \frac{5}{16} \cdot b_6 \cdot t^6. \quad (6)$$

Полученное выражение (6) позволяет напрямую, без выполнения дополнительных действий, вычислять среднеинтегральные остаточные напряжения для любого значения t и, следовательно, автоматизировать эту процедуру при исследовании влияния остаточных напряжений на характеристики усталости резьбовых деталей.

2 Учёт остаточных напряжений при определении КИН

В работах [2, 6, 7] показано, что существует зависимость между среднеинтегральными остаточными напряжениями $\bar{\sigma}_{\text{ост}}$ и циклической долговечностью резьбовых деталей N . Кроме того отмечено, что остаточные напряжения влияют на величину коэффициента интенсивности напряжений (КИН) K у вершины трещины.

Исходя из этого, можно сделать предположение, что должна существовать зависимость $K = f(\bar{\sigma}_{\text{ост}})$ между КИН и среднеинтегральными остаточными напряжениями. Если такая зависимость существует, то для упрощения расчёта циклической долговечности деталей возможно вычислять КИН без учёта остаточных напряжений (обозначим его K_0) и, зная зависимость среднеинтегральных остаточных напряжений от глубины трещины $\bar{\sigma}_{\text{ост}} = f(t)$, корректировать полученное значение КИН с учётом наличия остаточных напряжений.

В этом случае процесс определения циклической долговечности схематично можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} K_0(t, \sigma_{\text{ост}} = 0) \\ \sigma_{\text{ост}}(y) \rightarrow \bar{\sigma}_{\text{ост}}(t) \end{array} \right\} \rightarrow K[t, \sigma_{\text{ост}}(y)] \rightarrow N$$

Обратимся к предложенному Дж. Р. Ирвином [8] классическому уравнению, определяющему зависимость КИН от напряжений в зоне вершины трещины:

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} . \quad (7)$$

Здесь a – характерный размер трещины.

Предположим, что для трещин, находящихся в поле остаточным напряжений, величина КИН включает две составляющие:

$$K = K_0 + K_{\text{ОН}} , \quad (8)$$

где K_0 – составляющая от напряжений, вызванных рабочими нагрузками на деталь;

$K_{\text{ОН}}$ – составляющая от остаточных напряжений.

Поскольку среднеинтегральные остаточные напряжения – это остаточные напряжения на дне трещины с точностью до постоянного коэффициента, зависящего от радиуса у дна трещины и её глубины, с учётом (7) запишем:

$$K_{\text{ОН}} = \bar{\sigma}_{\text{ост}}\sqrt{\pi l} . \quad (9)$$

Для примера рассмотрим напряжённое состояние резьбовой части болта М6 из титанового сплава ВТ16, нагруженного осевым усилием 12 кН. В поверхностном слое действуют сжимающие остаточные напряжения, вызванные накатыванием резьбы и её последующей обработкой микрошариками. Распределение остаточных напряжений по глубине поверхностного слоя впадины резьбы показано на рисунке 2. Данные приведены из монографии [1].

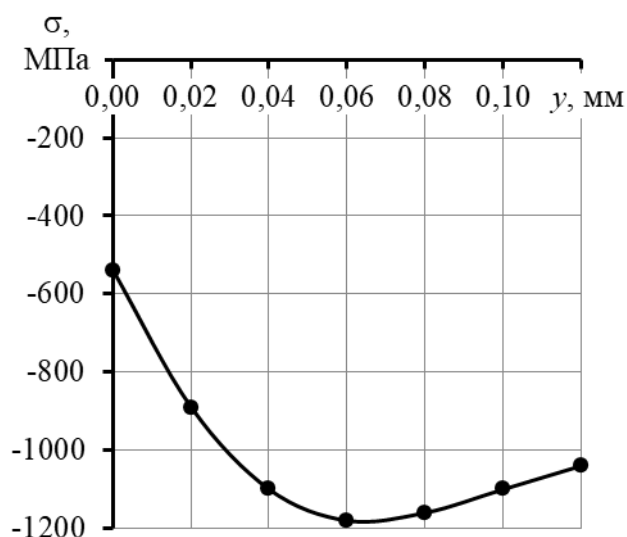


Рисунок 2 – Распределение остаточных напряжений по глубине y поверхностного слоя болта М6 из сплава ВТ16 после накатывания резьбы и обработки микрошариками

Определим КИН для разных глубин трещины t двумя способами: «прямым» (более трудоёмким) расчётом с использованием метода конечных элементов и с использованием формул (7-9). В первом случае остаточные напряжения моделируются с помощью метода термоупругости (подробно методика и примеры расчёта изложены в работе [2]). Во втором случае методом конечных элементов определяются только значения K_0 , остаточные напряжения при этом не моделируются, а учитываются за счёт добавления соответствующих величин K_{OH} в соответствии с формулой (8). Результаты расчётов и их сравнение приведены в таблице 2.

Из таблицы 2 видно, что использование формулы (8) для вычисления КИН даёт хорошее совпадение с результатами «прямого» расчёта. При этом вычисление КИН существенно упрощается, так как отпадает необходимость трудоёмкого моделирования остаточных напряжений. Значения КИН меньше нуля не имеют физического смысла и при определении циклической долговечности приравниваются к нулю. Для повышения точности предложенного способа в дальнейшем необходимо провести дополнительные исследования по уточнению формулы (9) с учётом сложного напряжённо-

деформированного состояния в зоне вершины трещины осесимметричных деталей с концентраторами.

Таблица 2 – Сравнение результатов расчёта КИН двумя методами

t , мм	«Прямой» расчёт МКЭ	Расчёт с учётом формул (7–9)				Δ , %
	K , МПа $\sqrt{мм}$	K_0 , МПа $\sqrt{мм}$	$\bar{\sigma}_{ост}$, МПа	$K_{ОН}$, МПа $\sqrt{мм}$	K , МПа $\sqrt{мм}$	
0,03	158,5	427,0	-862,5	-264,8	162,2	-2,4
0,04	125,6	458,4	-934,8	-331,4	127,0	-1,1
0,05	90,2	481,6	-990,5	-392,6	89,0	1,3
0,06	56,3	500,4	-1030,1	-447,2	53,2	5,5
0,07	25,4	516,5	-1055,2	-494,8	21,7	14,6
0,08	-10,3*	531,1	-1068,1	-535,4	-4,3*	–
0,09	-28,8*	544,8	-1071,8	-569,9	-25,1*	–
0,10	-35,3*	557,9	-1069,6	-599,5	-41,6*	–
0,11	-37,1*	570,7	-1064,1	-625,6	-54,9*	–
0,12	-32,8*	583,3	-1056,2	-648,5	-65,2*	–

* При $K < 0$, исходя из физического смысла КИН, принимается $K = 0$.

Заключение

Величина остаточных напряжений, глубина поверхностного слоя, в котором они действуют, и характер их распределения по этой глубине оказывают существенное влияние на характеристики сопротивления усталости упрочнённых деталей авиационной техники. Для оценки этого влияния кафедрой сопротивления материалов Самарского университета предложено использовать параметр – среднеинтегральные остаточные

напряжения, – учитывающий перечисленные характеристики. Среднеинтегральные остаточные напряжения возникают в упрочнённых деталях вблизи фронта кольцевой трещины и изменяются по мере увеличения её глубины вследствие перераспределения исходного (до появления трещины) поля остаточных напряжений.

Предложенное в настоящей работе модифицированное уравнение позволяет существенно упростить, а при необходимости, и автоматизировать вычисление среднеинтегральных остаточных напряжений для кольцевых трещин различной глубины.

Кроме того показано, что КИН вблизи фронта трещины так же зависит от среднеинтегральных остаточных напряжений, составляющая от которых в первом приближении может быть определена с использованием классического уравнения Дж. Р. Ирвина.

Таким образом, комплекс предложенных в настоящей статье уравнений и зависимостей позволяет с минимальной трудоёмкостью оценивать влияние остаточных напряжений на КИН, а через него на характеристики сопротивления усталости деталей авиационной техники.

Результаты приведённых исследований получены в рамках научно-технической деятельности, осуществляемой Самарским университетом и АО «ОДК».

Список использованных источников

1. Иванов, С.И. Остаточные напряжения и сопротивление усталости высокопрочных резбовых деталей / С.И. Иванов, В.Ф. Павлов, Б.В. Минин и др. – Самара: Издательство СНЦ РАН. – 2015. – 170 с.

2. Злобин, А.С. Влияние остаточных напряжений на малоцикловую усталость резбовых деталей: диссертация кандидата технических наук: 01.02.06 / Злобин Андрей Сергеевич. – Самара, 2022. – 138 с.

3. Иванов, С.И. Влияние остаточных напряжений на выносливость образцов с надрезом / С.И. Иванов, М.П. Шатунов, В.Ф. Павлов // Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. – Куйбышев: КуАИ, 1974. – Вып. 1. – С. 88-95.

4. Павлов, В.Ф. Влияние характера распределения остаточных напряжений по толщине поверхностного слоя детали на сопротивление усталости / В.Ф. Павлов // Известия вузов. Машиностроение. – 1987. – №7. – С. 3-6.

5. Павлов, В.Ф. О связи остаточных напряжений и предела выносливости при изгибе в условиях концентрации напряжений / В.Ф. Павлов // Известия вузов. Машиностроение. – 1986. – №8. – С. 29-32.

6. Злобин, А.С. Оценка влияния остаточных напряжений на малоцикловую усталость резьбовых деталей / А.С. Злобин // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета). – 2015. – Т. 14, № 4. – С. 118-125.

7. Злобин, А.С. Связь характеристик малоцикловой и многоцикловой усталости резьбовых деталей с остаточными напряжениями / А.С. Злобин // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2018. – Т. 17, № 1. – С. 128-136

8. Irwin, G.R. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. – 1957. – V. 24. – No 3. – P. 361-364.