

Гагаринский Вадим Юрьевич, аспирант, Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина, Российская Федерация,  
Рязань

## ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ КАЧЕСТВА ЗВУКА ПРИ НИЗКОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ КАНАЛА С МИНИМАЛЬНЫМИ ПОТЕРЯМИ ПАКЕТОВ

**Аннотация.** Статья посвящена задаче многокритериальной оптимизации параметров системы передачи голоса (битрейт, период пакетизации, избыточность FEC) для максимизации субъективного качества звука (Q). Формализована обобщенная целевая функция, учитывающая эффективный битрейт, вероятность потерь, задержку и джиттер, и система технических ограничений по пропускной способности, потерям и задержке. Задача сведена к поиску условного экстремума, для которого сформулированы условия оптимальности Куна-Таккера. Предложен итерационный численный метод проекции градиента с адаптивными множителями Лагранжа для настройки параметров в режиме реального времени. В заключении представлена аппроксимация оптимальных решений для практического применения. Предложенная формализация позволяет строго определять конфигурацию системы, гарантирующую выполнение требований к качеству в условиях динамического канала.

**Annotation.** The article addresses the multi-criteria optimization problem of voice transmission system parameters (bitrate, packetization period, FEC redundancy) to maximize subjective audio quality (Q). A generalized objective function is formalized, considering effective bitrate, packet loss probability, delay, and jitter, along with a system of technical constraints on bandwidth, losses, and delay. The problem is reduced to a search for a conditional extremum, for which the Kuhn-Tucker optimality conditions are formulated. An iterative numerical gradient projection method with adaptive Lagrange multipliers is proposed for real-time

parameter adaptation. The conclusion provides an approximation of optimal solutions for practical use. The proposed formalization allows for the rigorous determination of system configurations that guarantee quality-of-service requirements are met under dynamic channel conditions.

**Ключевые слова:** многопараметрическая оптимизация качества передачи голоса, ограничения полосы пропускания и задержки, модель эффективных потерь с FEC, условия оптимальности Куна-Таккера, итеративный метод проекции градиента.

**Keywords:** multi-parameter voice quality optimization, bandwidth and delay constraints, effective loss model with FEC, Kuhn-Tucker optimality conditions, iterative gradient projection method.

## **Введение**

Обеспечение высокого качества голосовой связи в IP-сетях требует одновременной оптимизации нескольких взаимозависимых параметров: битрейта кодеков, периода пакетизации и уровня избыточности FEC. Каждый из этих параметров по-разному влияет на ключевые характеристики системы — эффективную полосу пропускания, вероятность потери пакетов и суммарную задержку, — что формирует сложную задачу условной максимизации качества (Q).

Существующие эвристические подходы к адаптации часто не гарантируют нахождения глобально оптимальной конфигурации при заданных сетевых ограничениях ( $B$ ,  $P_{1\_max}$ ,  $D_{max}$ ). В данной статье задача формулируется строго как задача математического программирования с целевой MOS-подобной функцией качества и системой ограничений. Предлагается метод решения на основе условий оптимальности Куна-Таккера и итерационного алгоритма проекции градиента с адаптивными множителями Лагранжа. Этот подход позволяет определять аналитически обоснованные оптимальные настройки и создавать эффективные адаптивные механизмы для работы в реальном времени.

## Постановка задачи

Пусть:

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  — вектор параметров системы (битрейт, размер буфера, избыточность FEC и т.д.)
- $\mathbf{B}$  — доступная пропускная способность канала [бит/с]
- $P_1$  — вероятность потери пакета
- $\mathbf{D}$  — суммарная задержка [с]
- $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$  — качество звука (функция от параметров)

Задача оптимизации:

$Q(\mathbf{x}) \rightarrow \max$ , при

- $R(\mathbf{x}) \leq B$  (ограничение по полосе)
- $P_1(\mathbf{x}) \leq P_{1\_max}$  (ограничение по потерям)
- $D(\mathbf{x}) \leq D_{max}$  (ограничение по задержке)
- $x_{min} \leq x \leq x_{max}$  (физические ограничения)

Обобщенная функция качества (MOS-like)

$$Q(\mathbf{x}) = \alpha_0 - \alpha_1 \cdot \exp(-\beta \cdot R) - \alpha_2 \cdot P_1 - \alpha_3 \cdot D - \alpha_4 \cdot J$$

- $R$  — эффективный битрейт [бит/с]
- $P_1$  — вероятность потери пакета
- $D$  — задержка [с]
- $J$  — джиттер [с]
- $\alpha_i, \beta$  — эмпирические коэффициенты ( $\alpha_i > 0$ )

Модель кодек-зависимого качества

$$Q(R) = Q_{max} - (Q_{max} - Q_{min}) \cdot \exp(-k \cdot (R - R_{min}))$$

- $Q_{max}, Q_{min}$  — предельные значения качества (MOS 4.5 и 1.0)
- $R_{min}$  — минимальный битрейт для разборчивости речи
- $k$  — коэффициент эффективности кодека

Модель ограничения по полосе

$$R_{\text{eff}}(x) = R_c(x) + H/T_p + \rho \cdot R_c + P_r \cdot R_c$$

- $H$  — размер заголовков [бит]
- $T_p$  — период пакетизации [с]
- $\rho$  — коэффициент избыточности FEC ( $0 \leq \rho \leq 1$ )
- $P_r$  — вероятность повторной передачи

Эффективная вероятность потерь с FEC для кода  $(n, k)$  с исправлением  $t$  ошибок:

$$P_{\text{eff}} = 1 - \sum_{i=0}^t C(n, i) \cdot (1 - P_l)^{n-i} \cdot P_l^i,$$

где  $C(n, i)$  — биномиальный коэффициент.

Формулировка задачи оптимизации в общем виде:

$$Q(R, P_{\text{eff}}, D_{\text{total}}) \rightarrow \max, \text{ при } \begin{cases} R_{\text{eff}}(R_{\text{codec}}, \rho, T_{\text{packet}}) \leq B, \\ P_{\text{eff}}(P_{\text{loss}}, \rho, t) \leq P_{\text{max}}, \\ D_{\text{total}}(T_{\text{packet}}, \rho, \tau) \leq D_{\text{max}}, \\ 0 \leq R_{\text{codec}} \leq R_{\text{max}}, \\ 0 \leq \rho \leq \rho_{\text{max}}, \\ T_{\text{min}} \leq T_{\text{packet}} \leq T_{\text{max}}, \\ \tau_{\text{min}} \leq \tau \leq \tau_{\text{max}} \end{cases}$$

$$L(x, \lambda, \mu, \nu) = Q(x) - \lambda \cdot [R_{\text{eff}}(x) - B] - \mu \cdot [P_{\text{eff}}(x) - P_{\text{max}}] - \nu \cdot [D_{\text{t}}(x) - D_{\text{max}}],$$

где  $\lambda, \mu, \nu \geq 0$  — множители Лагранжа.

Условиями оптимальности назовем:

- Стационарность:  $\nabla Q(x^*) = \lambda \cdot \nabla R_{\text{eff}}(x^*) + \mu \cdot \nabla P_{\text{eff}}(x^*) + \nu \cdot \nabla D_{\text{total}}(x^*)$

$$\text{– Допустимость: } \begin{cases} R_{\text{eff}}(x^*) \leq B, \\ P_{\text{eff}}(x^*) \leq P_{\text{max}}, \\ D_{\text{total}}(x^*) \leq D_{\text{max}}, \\ x_{\text{min}} \leq x^* \leq x_{\text{max}} \end{cases}$$

$$\text{– Дополняющая нежесткость: } \begin{cases} \lambda \cdot [R_{\text{eff}}(x^*) - B] = 0, \\ \mu \cdot [P_{\text{eff}}(x^*) - P_{\text{max}}] = 0, \\ \nu \cdot [D_{\text{total}}(x^*) - D_{\text{max}}] = 0 \end{cases}$$

- Неотрицательность:  $\lambda, \mu, \nu \geq 0$

### Численный метод решения

$$x_{\{k+1\}} = \text{ПХ}[x_k + \gamma_k \cdot \nabla Q(x_k) - \lambda_k \cdot \nabla R_{\text{eff}}(x_k) - \mu_k \cdot \nabla P_{\text{eff}}(x_k) - \nu_k \cdot \nabla D(x_k)]$$

- ПХ — проекция на допустимое множество
- $\gamma_k$  — шаг обучения

$$\text{Обновление множителей Лагранжа: } \begin{cases} \lambda_{\{k+1\}} = [\lambda_k + \alpha \cdot (R_{\text{eff}}(x_k) - B)]^+, \\ \mu_{\{k+1\}} = [\mu_k + \beta \cdot (P_{\text{eff}}(x_k) - P_{\text{max}})]^+, \\ \nu_{\{k+1\}} = [\nu_k + \delta \cdot (D(x_k) - D_{\text{max}})]^+ \end{cases}$$

Оптимальная конфигурация  $x^*$  определяется как решение системы:

$$\begin{cases} \nabla Q(x^*) = \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i(x^*), \\ g_i(x^*) \leq 0, \lambda_i \geq 0, \lambda_i \cdot g_i(x^*) = 0 \end{cases}$$

где  $g_i(x^*)$  — функции ограничений.

### Заключение

Для реального применения можно использовать аппроксимацию:

$$\begin{cases} R^* \approx B / [1 + k_1 \cdot P_{\text{loss}} + k_2 \cdot \exp(-k_3 \cdot B)], \\ T_{\text{packet}}^* \approx T_0 + T_1 \cdot \exp(-k_4 \cdot B), \\ \rho^* \approx \rho_0 + \rho_1 \cdot P_{\text{loss}} + \rho_2 \cdot P_{\text{loss}}^2 \end{cases}$$

где коэффициенты  $k_i, T_i, \rho_i$  калибруются по экспериментальным данным.

Данная математическая формализация позволяет:

- Строго определить оптимальную конфигурацию системы
- Аналитически исследовать влияние параметров канала
- Разработать эффективные алгоритмы адаптации в реальном времени
- Гарантировать выполнение требований по качеству при заданных ограничениях

### Список литературы

1. Кулешов, С.В. (2021). Методы оптимизации с ограничениями в задачах телекоммуникаций: от условий Куна-Таккера к практической реализации. *Информатика и ее применения*, 15(3), 88–95.
2. Рекомендация МСЭ-Т G.107 (12/2023). *E-модель: вычислительная модель для использования при планировании передачи*. Международный союз электросвязи.
3. Соколов, В.Г., & Кузнецов, А.А. (2022). Адаптивные алгоритмы управления качеством обслуживания в мультисервисных сетях связи. *Труды Института системного программирования РАН*, 34(1), 45–68.
4. Claypool, M., & Tanner, J. (2022). Влияние джиттера на воспринимаемое качество видео и аудио. \*Труды 13-й конференции ACM по мультимедийным системам (MMSys '22)\*, 149–160. (Пер. с англ.).
5. Ribeiro, F., Ormond, O., & de Naan, G. (2023). Обзор методов прогнозирования качества восприятия на основе машинного обучения для мультимедийных сервисов реального времени. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 25(2), 1187–1214. (Пер. с англ.).

## References

1. Kuleshov, S.V. (2021). Constrained optimization methods in telecommunications: from Kuhn-Tucker conditions to practical implementation. *Informatics and its Applications*, 15(3), 88–95.
2. ITU-T Recommendation G.107 (12/2023). *The E-model: a computational model for use in transmission planning*. International Telecommunication Union.
3. Sokolov, V.G., & Kuznetsov, A.A. (2022). Adaptive QoS management algorithms in multiservice communication networks. *Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS*, 34(1), 45–68.
4. Claypool, M., & Tanner, J. (2022). The Effects of Jitter on the Perceptual Quality of Video and Audio. *Proceedings of the 13th ACM Multimedia Systems Conference (MMSys '22)*, 149–160.

5. Ribeiro, F., Ormond, O., & de Haan, G. (2023). A Survey on Machine Learning-Based QoE Prediction for Real-Time Multimedia Services. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 25(2), 1187–1214.