УДК 519.22, 368

Назарбаев Фархат Токтогазиевич – Старший преподаватель Кыргызского национального университета имени Ж.Баласагына
Муратова Самара Муратовна – магистрантка Кыргызского национального университета имени Ж.Баласагына

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕТТО ПРЕМИЙ И РЕЗЕРВОВ СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ ПРИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ТАБЛИЦ СМЕРТНОСТИ

Аннотация. В статье исследуется методы вычислений нетто премий и резервов страхования жизни при параболической интерполяции таблиц смертности. Задачи страхования жизни с выплатами в момент смерти, предполагает непрерывность времени выплаты, но мы будем рассматривать модели с выплатами в конце месяца смерти, то есть с дробными возрастами, но дискретными по времени. В расчетах будем использовать параболическую интерполяцию для определения смертности в нецелых интервалах времени.

Annotation. The article explores the methods of calculating net premiums and life insurance reserves using parabolic interpolation of mortality tables. Life insurance problems with payments at the time of death assume continuous payment time, but we will consider models with payments at the end of the month of death, i.e., with fractional ages but discrete time. We will use parabolic interpolation to determine mortality in non-integer time intervals.

Ключевые слова: актуарная математика, таблицы смертности, параболическая интерполяция, таблицы смертности для дробных возрастов, страхование жизни.

Keywords: actuarial mathematics, mortality table, parabolic interpolation, mortality tables for fractional ages, live insurance.

Теоретическое обоснование параболической интерполяции таблиц смертности была предложена в работах [1] и [2], в связи с представленными данными национального статистического комитета Кыргызской Республики (КР) [3], график таблицы приведена ниже на рис. 1. Практическое же применение данного метода интерполяции на конкретных примерах статистики приводится в работе [4]. Предлагаемые в работах [5], [6] и [7] построение интерполяционных таблиц для дробных возрастов, имеют один недостаток, все интерполяционные формулы имеют выпуклость вниз или не имеют выпуклости вовсе (линейная интерполяция). А график таблицы смертности из [3], как можно заметить имеет выпуклость вверх. В трудах [5], [6] и [7] приводится много практических примеров их применения, но так как предлагаемый нами метод интерполяции имеет параболическую форму, то ее применение особенно для непрерывного случая распределения смертности вводит сложности для ручного расчета, но мы покажем математическую модель, а затем и алгоритм решения данной задачи на языке Python.

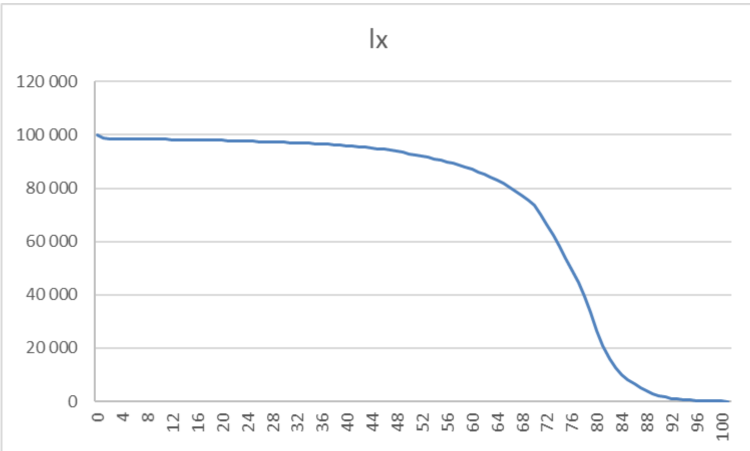

Рис 1. Число доживших до возраста x из 100 000.

Для определения значений таблиц смертности для нецелых возрастов мы будем использовать формулу из работы [1]:

$$s^2(x+t) = (1-t) \cdot s^2(x) + t \cdot s^2(x+1) \qquad (1)$$

здесь $s(x+t)$ – число доживших до возраста $x+t$ – лет, x – целое число лет, а t – нецелая часть возраста, т.е. $0 \le t < 1$. Для определения значений числа, доживших до возраста $x+t$, как видно из (1) нам необходимо данные из таблицы смертности, например для Кыргызстана их можно взять из [3].

Из работы [1] мы знаем, что

$$s(x+t)=\sqrt{s^2(x)-t\cdot\left(s^2(x)-s^2(x+1)\right)} \tag{2}$$

тогда, вероятности дожития и смертности для нецелых возрастов имеют вид:

$$_tp_x=\sqrt{1-t(1-p_x^2)}=\sqrt{1-t+t\cdot p_x^2} \tag{3}$$

$$_tq_x=1-\sqrt{1-t+t\cdot p_x^2} \tag{4}$$

Рассмотрим формулу для определения единицы страховой премии при пожизненном страховании жизни, с выплатой в конце месяца смерти (не года), такие задачи актуальны, т.к. мгновенные выплаты все равно невозможно осуществить, т.к. на подготовку документов все равно потребуется определенное время. Естественно еще одно замечание, сейчас расчет ведется только нетто части премии, т.к. для брутто нужно учитывать уже другие параметры.

$$\bar{A}_x=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{12}\ {}_{k+\frac{m}{12}}p_x\nu^{k+\frac{m}{12}} \tag{5}$$

Как видно двойная сумма здесь не случайна, вторая сумма предлагает расчеты для дробных возрастов между возрастами k и $k+1$ лет, кроме случая, когда $m=12$, что означает как раз возраст $k+1$.

Теперь приведем подробное решения формулы (5), используя уже полученные формулы (3) и (4) из [2], получим:

$$\bar{A}_x=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{12}\ {}_{k+\frac{m-1}{12}}p_x\cdot\ {}_{\frac{1}{12}}q_{x+k+\frac{m-1}{12}}\nu^{k+\frac{m}{12}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{12}\sqrt{1-\frac{m-1}{12}+\frac{m-1}{12}\ \cdot_k p_x^2}\cdot\left(1-\sqrt{1-\frac{m}{12}+\frac{m}{12}\cdot p_x^2}\right)\nu^{k+\frac{m}{12}} \tag{6}$$

Т.к. в таблицах смертности приводится значения количества доживших, и при расчетах мы будем пользоваться именно данными таблицами, лучше дать формулу через $s(x)$, тогда получим следующую формулу:

$$\bar{A}_x=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{12}\frac{s\left(x+k+\frac{m-1}{12}\right)}{s(x)}\cdot\frac{\left(s\left(x+k+\frac{m-1}{12}\right)-s\left(x+k+\frac{m}{12}\right)\right)}{s\left(x+k+\frac{m-1}{12}\right)}\cdot\nu^{k+\frac{m}{12}}$$

$$=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{12} \frac{\left(s\left(x + k + \frac{m-1}{12}\right) - s\left(x + k + \frac{m}{12}\right)\right)}{s(x)} \cdot \nu^{k+\frac{m}{12}} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{12} \frac{1}{s(x)} \left(\sqrt{s^2(x+k) - \frac{m}{12} \cdot \left(s^2(x+k) - s^2(x+k+1)\right)} - \sqrt{s^2(x+k) - \frac{m}{12} \cdot \left(s^2(x+k) - s^2(x+k+1)\right)} \right) \cdot \nu^{k+\frac{m}{12}} \qquad (7)$$

Применение формулы (7) является хоть вы вычислительно трудоемким, его можно использовать в расчетах на компьютере, т.к. данный алгоритм легко программируется на языках программирования.

Теперь рассмотрим расчет резерва для пожизненного страхования. Так как мы рассматриваем пожизненное страхование с разовыми выплатами мы получаем что обязательство застрахованного лица перед страховой компанией полностью выполнено, а обязательства страховой компании только предстоит, и она будет равна.

$${}_tV_x = \ {}_ta_B - \ {}_ta_c$$

Где $\ {}_tV_x$ – резерв через t лет после заключения договора пожизненного страхования с человеков в возрасте x лет, $\ {}_ta_{\text{С}}$ – обязательства застрахованного лица перед страховой компанией через t лет после заключения договора, что равно нулю, т.к. застрахованное лицо уже внесло всю сумму страховки, в момент заключения договора. А вот обязательства страховой компании $\ {}_ta_B$ еще предстоит выполнить перед застрахованным лицом, оно в нашем случае и будет равно страховому резерву.

$${}_tV_x = \ {}_ta_B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{12} \ {}_{k+\frac{m-1}{12}}p_{x+t} \cdot \ {}_{\frac{1}{12}}q_{x+t+k+\frac{m-1}{12}} \nu^{k+\frac{m}{12}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{12} \sqrt{1 - \frac{m-1}{12} + \frac{m-1}{12} \ \cdot_k p_{x+t}^2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m}{12} + \frac{m}{12} \cdot p_{x+t}^2}\right) \nu^{k+\frac{m}{12}} \quad (8)$$

Следует заметить, что в случае пожизненного страхования, расчет резервов или страховой премии зависит только от момента расчета и соответственно в формуле (8) полагается что t – целое значение возраста, хотя выполнение данного условия не требуется. Но тем не менее расчет резервов стандартно проводится в начале и конце годов.

Также для резервов приведем формулу в терминах $s(x)$.

$$
{}_tV_x = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{12}\frac{\left(s\left(x+t+k+\frac{m-1}{12}\right)-s\left(x+t+k+\frac{m}{12}\right)\right)}{s(x+t)}\cdot \nu^{k+\frac{m}{12}} =
$$

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{12}\frac{1}{s(x+t)}\left(\sqrt{s^2(x+t+k)-\frac{m}{12}\cdot\left(s^2(x+t+k)-s^2(x+t+k+1)\right)}-\right.
$$

$$
\left.\sqrt{s^2(x+t+k)-\frac{m}{12}\cdot\left(s^2(x+t+k)-s^2(x+t+k+1)\right)}\right)\cdot \nu^{k+\frac{m}{12}} \qquad (9)
$$

Формула (9) легко применима для расчетов с применением компьютерных технологий, т.к. его легко запрограммировать на языках программирования.

Формулы (5-7) позволяют определить размер разовой нетто премий для пожизненного страхования жизни, с учетом параболической интерполяции, для дробных ежемесячных таблиц смертности. В зависимости какая статистика предоставляется можно легко определить необходимую формулу для расчета. Для случаев, когда известны вероятности можно использовать формулу (5-6), а для случая, когда дана таблица количества доживших до определенного возраста, можно использовать формулу (7).

Аналогично с формулами расчета резерва, формулу (8) можно использовать если известны таблицы вероятностей и формулу (9) для случая, когда исвестны количество доживщих до определенного возраста, нельзя забывать, замечания приведенные в работах [2], [4] что в случаях расчета размеров премий для возрастов превышающих 80 лет лучше использовать интерполяционные формулы с отсутствием выпуклости, или формулы интерполяции с выпуклостью вверх.

Литература

1. Nazarbaev F.T., Bakberdieva M.B. Examples of the application of parabolic interpolation of mortality tables for fractional ages // Herald of Institute

Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic. 2023. № 2. С. 129-133.

2. Назарбаев Ф.Т., Доолбекова А.У. Об одном методе интерполяции таблиц смертности для дробных возрастов // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2022. № 6-3 (69). С. 103-106.
3. Демографический ежегодник Кыргызской Республики: 2016-2020.-Б: Нацстатком Кырг. Респ., 2021:-312с. ISBN 978-9967-26-837-1
4. Назарбаев Ф.Т., Жакышова А.Ж., Нурлан кызы А., Турганбаев Б.Б. Применение метода ньютона для решения задач страхования жизни и аннуитетов // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2024. № 5-5 (92). С. 130-136.
5. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж. Актуарная математика. Перев. С англ. / Под ред. В.К. Малиновского. – М.: Янус-К, 2001. – 656 с., илл.
6. Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. — Издание 2-е, переработанное и дополненное. — М.: Анкил, 2002 г. 262 стр. ISBN 5-86476-194-X
7. Фалин Г. И., Фалин А. И. Актуарная математика в задачах. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 192 с. — ISBN 5-9221-0451-9.

Literature

1. Nazarbaev F.T., Bakberdieva M.B. Examples of the application of parabolic interpolation of mortality tables for fractional ages // Herald of Institute Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic. 2023. No. 2. Pp. 129-133.
2. Nazarbaev F.T., Doolbekova A.U. On one method of interpolation of mortality tables for fractional ages // International Journal of Humanities and Natural Sciences. 2022. № 6-3 (69). pp. 103-106.

3. Demographic Yearbook of the Kyrgyz Republic: 2016-2020.-B: National Statistical Committee of Kyrgyzstan. Rep., 2021:-312c. ISBN 978-9967-26-837-1
4. Nazarbayev F.T., Zhakyshova A.Zh., Nurlan kyz A., Turganbayev B.B. Application of the Newton method for solving life insurance and annuity problems // International Journal of Humanities and Natural Sciences. 2024. No. 5-5 (92). Pp. 130-136.
5. Bowers N., Gerber H., Jones D., Nesbitt S., Hickman J. Actuarial Mathematics. Translated. From English / Edited by V.K. Malinovsky. – M.: Yanus-K, 2001. – 656 p., ill.
6. Falin G.I. Mathematical Foundations of the Theory of Life Insurance and Pension Schemes. — 2nd Edition, Revised and Expanded. — Moscow: Ankil, 2002. 262 pages. ISBN 5-86476-194-X
7. Falin G. I., Falin A. I. Actuarial Mathematics in Problems. — 2nd Edition, Revised. and additional. — Moscow: FIZMATLIT, 2003. — 192 p. — ISBN 5-9221-0451-9.