Шлопак Александр Анфирович - кандидат технических наук, доцент,

Кафедра К1 «Системы автоматического управления»

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (национальный исследовательский университет)

МФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Мытищи

О ВЛИЯНИИ ОГРАНИЧЕННОГО ВНЕШНЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ НА СИСТЕМЫ С ПРЯМОЙ АДАПТАЦИЕЙ

Аннотация: в статье исследуется влияние неизвестного ограниченного внешнего аддитивного возмущения на систему прямого адаптивного управления с эталонной моделью для объекта с согласованной неопределённостью, представимой в линейно-параметрическом виде через известный вектор базисных функций. Сравниваются два метода: метод сигма модификации закона адаптации с модификацией мертвой зоны. Оба метода направлены на подавление дрейфа параметров при ограниченных возмущениях и отсутствия достаточного возбуждения. Показано, что метод мертвой зоны отключает адаптацию при малой ошибке, однако при наличии остаточной ошибки может сохраняться медленный дрейф на интервалах включения. Сигма модификация добавляет демпфирование параметров и обеспечивает их предельную ограниченность, поэтому на практике сильнее подавляет дрейф. Методом Ляпунова выводятся законы адаптации и показывается, что в присутствии возмущения производная выбранной функции Ляпунова имеет вид «отрицательный квадратичный член + добавка от возмущения», вследствие чего асимптотическая сходимость ошибки слежения к нулю, вообще говоря, теряется, если возмущение не стремится к нулю. Получена оценка равномерной предельной ограниченности ошибки слежения: ошибка входит и остаётся в шаре, радиус которого пропорционален верхней границе возмущения.

Ключевые слова: адаптивная система, метод Ляпунова,

Shlopak Alexander Anfirovich – PhD in Engineering Sciences, Associate Professor

Department K1 «Automatic Control Systems»

Mytishchi branch of Bauman Moscow State Technical University,

Mytishchi

Abstract: This paper investigates the effect of an unknown bounded external additive disturbance on a direct model reference adaptive control (MRAC) system for a plant with matched uncertainty that admits a linearly parameterized representation via a known vector of basis functions. Two approaches are compared: the σ-modification of the adaptation law and the dead-zone modification. Both methods aim to suppress parameter drift under bounded disturbances and insufficient excitation. It is shown that the dead-zone method disables adaptation when the tracking error is small; however, in the presence of a residual error, slow drift may persist during the intervals when adaptation is active. The σ-modification introduces parameter damping and guarantees ultimate boundedness of the parameters, and therefore provides stronger drift suppression in practice. Using the Lyapunov method, adaptation laws are derived and it is shown that, in the presence of disturbance, the time derivative of the chosen Lyapunov function takes the form "a negative quadratic term plus a disturbance-dependent term," so asymptotic convergence of the tracking error to zero is generally lost unless the disturbance tends to zero. An estimate of the uniformly ultimately bounded tracking error is obtained: the error enters and remains within a ball whose radius is proportional to the upper bound on the disturbance.

Keywords*:* adaptive, system, method, Lyapunov

УДК 681.513.66

Параметрическая адаптация для линейных и нелинейных систем рассматривается в [1], [2], [3]. В данной статье исследуется влияние неизвестного ограниченного внешнего аддитивного возмущения на систему прямого адаптивного управления с эталонной моделью для объекта с согласованной неопределённостью, представимой в линейно-параметрическом виде через известный вектор базисных функций.

Рассмотрим *MIMO* систему с прямой адаптацией, на которую воздействует неизвестное ограниченное внешнее аддитивное возмущение.

$$\dot{x} = Ax + B\left[u + f(x)\right] + w(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in {\sim}^{n}$ - вектор состояния,

$u(t) \in {\sim}^{m}$- вектор управления,

$A \in {\sim}^{n\times n}$ - постоянная матрица, состоящая из неизвестных коэффициентов,

$B \in {\sim}^{n\times m}$ - постоянная матрица, состоящая из известных коэффициентов,

$f(x) \in {\sim}^{m}$ - функция, которая может быть линейно параметризована

$f(x) = \Theta^{*^T}\Phi(x)$,

где $\Theta^{*} \in {\sim}^{l\times m}$ - постоянная неизвестная матрица,

$\Phi(x) \in {\sim}^{l}$ - известная вектор функция, состоящая из базисных функций.

$w(t) \in {\sim}^{n}, \quad \left\|w(t)\right\| \le w_0$ - внешнее ограниченное возмущение неизвестной величины.

Эталонная модель

$$\dot{y} = A_0 y + B_0 g, \tag{2}$$

где $y(t) \in {\sim}^{n}$ - вектор состояния модели,

$A_0 \in {\sim}^{n\times n}$ - заданная постоянная гурвицева матрица,

$B_0 \in {\sim}^{n\times q}$ - заданная матрица,

$g(t) \in \sim^{q}$ - вектор входных задающих кусочно-непрерывных и ограниченных сигналов.

Идеальный коэффициент усиления обратной связи K_x^* и коэффициент K_g^* можно определить из соответствия объекта и модели:

$$A + BK_x^* = A_0,$$

$$BK_g^* = B_0.$$

Пусть адаптивный закон управления имеет вид:

$$u = K_x(t)x + K_g g - \Theta^T \Phi(x), \qquad (3)$$

где K_x, K_g, Θ - настраиваемые параметры.

Подставим управление (3) в объект (1):

$$\dot{x} = (A + BK_x)x + BK_g g - B\tilde{\Theta}^T \Phi(x) + w, \qquad (4)$$

где $\tilde{\Theta} = \Theta - \Theta^*$.

Введем ошибки оценок: $\tilde{K}_x = K_x - K_x^*$, $\tilde{K}_g = K_g - K_g^*$.

Дифференциальное уравнение по ошибке рассогласования $e(t) = x(t) - y(t)$ найдем из (2) и (4):

$$\dot{e} = A_0 e + B\tilde{K}_x x + B\tilde{K}_g g - B\tilde{\Theta}^T \Phi(x) + w.$$

Выберем функцию Ляпунова в виде:

$$V\left(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_g, \tilde{\Theta}\right) = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2} tr\left(\tilde{K}_x \Gamma_x^{-1} \tilde{K}_x^T\right) + \frac{1}{2} tr\left(\tilde{K}_g \Gamma_g^{-1} \tilde{K}_g^T\right) + \frac{1}{2} tr\left(\tilde{\Theta} \Gamma_\Theta^{-1} \tilde{\Theta}^T\right),$$

где Γ_x, Γ_g, Γ_Θ - симметричные положительно определенные матрицы коэффициентов в контурах адаптации и $P = P^T > 0$ - решение $A_0^T P + P A_0 = -Q$, $Q = Q^T > 0$.

Законы адаптации:

$$\boxed{\dot{\tilde{K}}_x = -\Gamma_x x e^T P B} \quad \boxed{\dot{\tilde{K}}_g = -\Gamma_g g e^T P B} \quad \boxed{\dot{\tilde{\Theta}} = -\Gamma_\Theta \Phi(x) e^T P B}$$

Находим полную производную по времени в силу уравнения движения:

$$\dot{V}\left(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_g, \tilde{\Theta}\right) = -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P w$$

Если $\left\| w(t) \right\|_\infty \le w_0$, то $\|w\|_2 \le \sqrt{n} \|w\|_\infty \le \sqrt{n} w_0$. Тогда

$$e^T P w \le \|e\|_2 \|P\|_2 \|w\|_2 \le \lambda_{\max}(P) \|e\|_2 \sqrt{n} w_0,$$

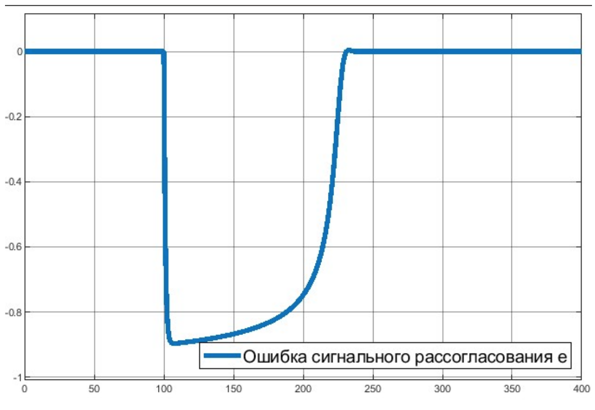
$$\dot{V} \le -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + \lambda_{\max}(P) \|e\| \sqrt{n} w_0$$

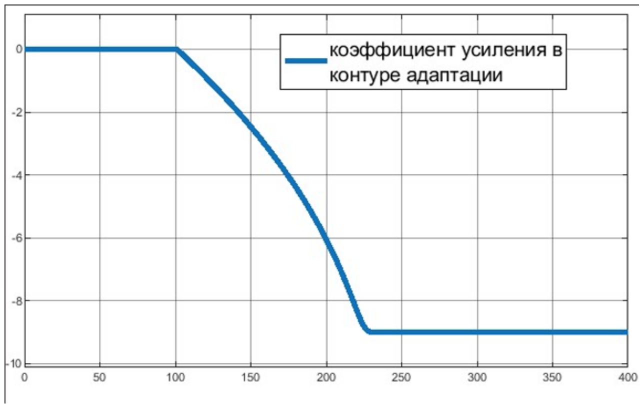
Таким образом, $\dot{V}\left(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_g, \tilde{\Theta}\right) \le 0$, если

$$\|e\| \ge \frac{2\lambda_{\max}(P)\sqrt{n} w_0}{\lambda_{\min}(Q)} = p.$$

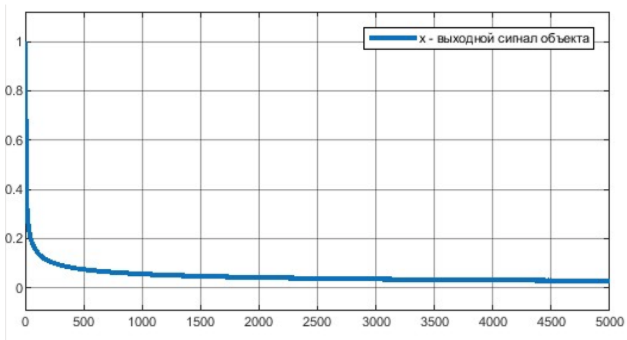
Для иллюстрации возьмем систему первого порядка $\dot{x} = ax + u + w$, где a неизвестно [4].

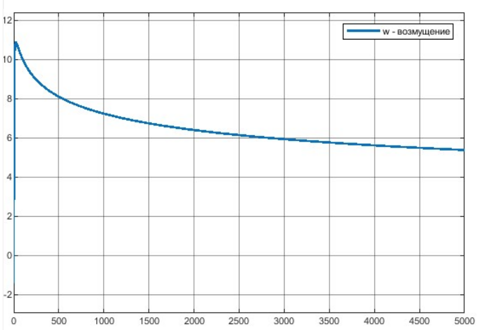
1. Случай отсутствия внешнего возмущения $w = 0$

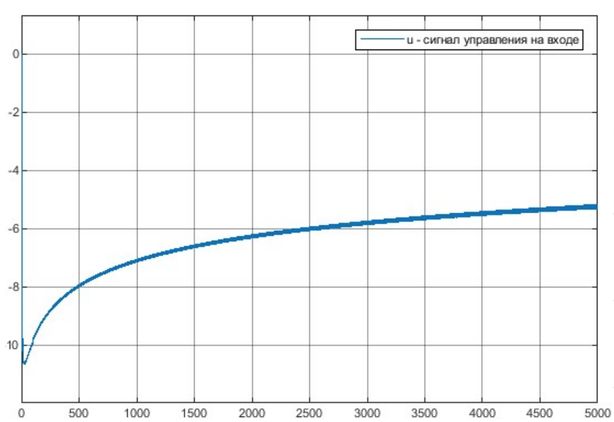


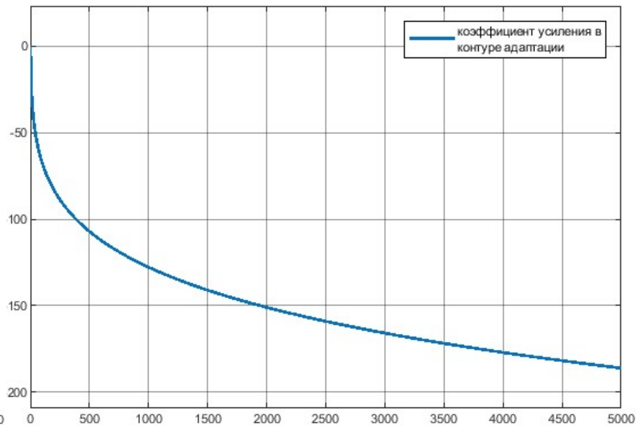


2. Внешнее возмущение присутствует $w \neq 0$









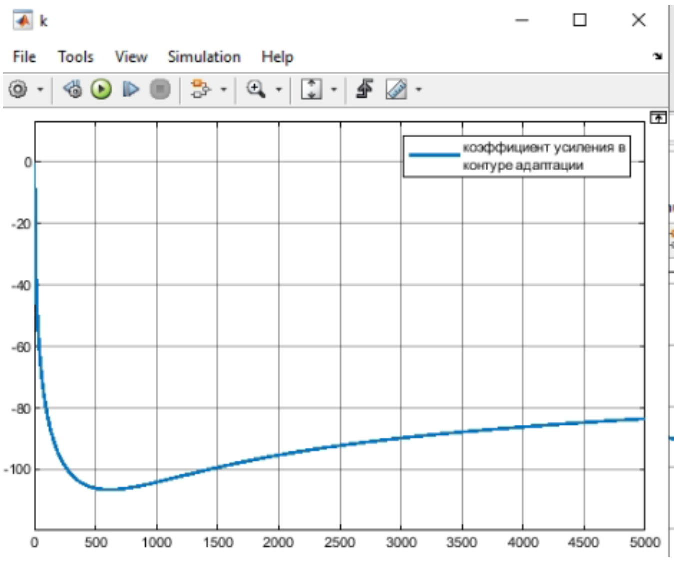
Предположим, что адаптивная система должна обеспечивать сопровождение нулевого выхода эталонной модели, т.е. $y(t)=0$ и возмущение ограничено - $w_0=11$. В этом случае управление имеет вид $u=k_x(t)x$, а закон адаптации для $k_x(t)$ задается уравнением $\dot{k}_x=-\gamma_x x^2$. Моделирование показывает, что выход $x(t)$ и управление $u(t)$ ограничены и ошибка монотонно убывает и стремится к нулю, однако наблюдается медленный уход параметра k_x (параметрический дрейф). Порог $p=22$ и, следовательно, условие $\dot{V} \leq 0$

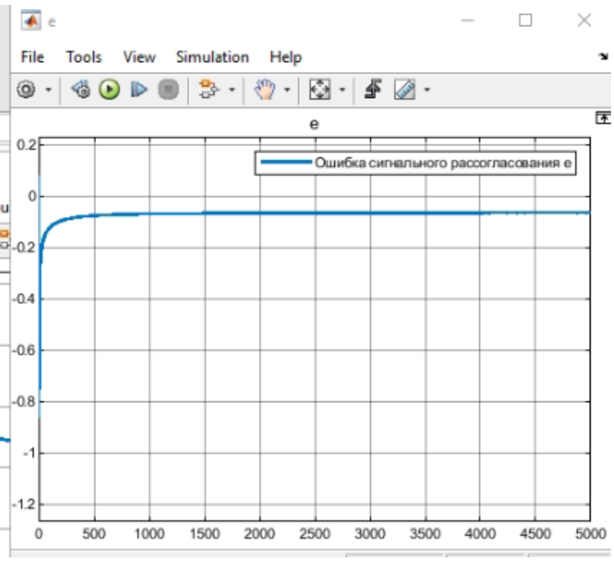
выполняется только вне области $|e(t)| \geq p.$ При наличии возмущения система быстро попадает в область $|e(t)| < p$ и знак $\dot{V}$ не фиксирован (возможны локальные участки $\dot{V} > 0$). Таким образом, ошибка $e(t)$ гарантировано равномерно предельно ограничена, но коэффициент $k_x(t)$ может медленно дрейфовать, поскольку интегратор параметра накапливает малое смещение:

$$k_x(t) = k_x(0) + \int_0^t \dot{k}_x(\tau) d\tau = k_x(0) - \gamma_x \int_0^t x^2(\tau) d\tau.$$

При $g(t) = 1$ (ступенчатое воздействие) дрейф может исчезать. Возникает выраженный переходный процесс: $x(t)$ существенно меняется, (в том числе по знаку и/или по крутизне, поэтому произведение $x(t)e(t)$ становится знакопеременным, а его среднее значение стремится к нулю. Следовательно, среднее значение входа интегратора в контуре адаптации уменьшается, и $k_x(t)$ перестает дрейфовать. Для подавления параметрического дрейфа при ограниченных возмущениях и недостаточном возбуждении регрессора обычно применяют:1) σ-модификацию; 2) модификацию с мертвой зоной; 3) проекцию; 4) нормализацию.

Введение сигма модификации $\sigma = 0.001$ повышает робастность системы при сохранении заданной точности слежения $\left(\left|e(t) < 0.1\right|\right)$.





σ-модификация («утечка») вводит демпфирующий член в закон адаптации и предотвращает неограниченный рост (дрейф) оценок параметров при ограниченных возмущениях и отсутствия PE (persistent excitation, условие постоянного возбуждения регрессора). По сравнению с модификацией с мертвой зоной, σ-модификация обеспечивает непрерывное подавление накопления постоянной составляющей градиентного сигнала, поэтому дрейф $k_x(t)$ уменьшается сильнее. При малом σ влияние на точность слежения незначительно, что подтверждается выполнением условия $|e(t)| < 0.1$. Таким образом, введение σ-модификации вида $\dot{k}_x(t) = -\gamma s(t) - \sigma k_x(t)$ превращает закон адаптации из чисто интегрального в апериодическое звено. Это устраняет неограниченный рост оценки коэффициента усиления в контуре адаптации при наличии постоянной составляющей возмущения (дрейф) и обеспечивает ограниченность $k_x(t)$. Ключевая формула для полной производной функции Ляпунова в этом случае имеет вид:

$$\dot{V}\left(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_g, \tilde{\Theta}\right) = -\frac{1}{2} e^T Q e - \frac{\sigma}{\gamma} \tilde{k}_x^2 - \frac{\sigma}{\gamma} \tilde{k}_x k_x + e^T P w.$$

Появляется отрицательный квадратичный член $-\frac{\sigma}{\gamma} \tilde{k}_x^2$,(квадратичная форма по ошибке оценки параметра), который подавляет дрейф. Наличие перекрестного члена, содержащего $-\frac{\sigma}{\gamma}\tilde{k}_x k_x$ можно трактовать как «постоянное возмущение» в параметрической части. Оценка сверху приводит к стандартному неравенству вида:

$$\dot{V} \le -c_1\|e\|^2 - c_2\tilde{k}_x^2 + c_3 w_0^2 + c_4.$$

Вывод: при ограниченном $w(t)$ и $\sigma > 0$ получаем предельную ограниченность не только ошибки $e(t)$, но и коэффициента усиления $k_x(t)$в контуре адаптации (дрейф существенно подавляется, что и наблюдается при моделировании).

Список литературы/ References

1. Есаков В.А., Дудко В.Г., Шлопак А.А. Синтез адаптивных систем методом функций Ляпунова.

Проблемы современной науки и образования 2018. № 12 (132), 47-50.

2. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления: Учебник/под ред. Н.Д. Егупова.-М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.-744с.

3. Карабутов Н.Н. Адаптивная идентификация систем: Информационный синтез. – М.: КомКнига, 2006.– 384с.

4. Nhan T. Nguyen, Model-Reference Adaptive Control. Springer International Publishing AG 2018.