Тюменцев Александр Григорьевич,
Доцент каф. РФ и ТФ АлтГУ
ГОУ ВПО «Алтайский Государственный Университет»
г. Барнаул

ИНТЕГРАЦИЯ ПРЯМОГО И СОПРЯЖЕННОГО ПОДХОДОВ В ПРЕПОДАВАНИИ ФИЗИКИ ПРОХОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

Аннотация

В работе обсуждается использование прямого и сопряженного подходов при выводе уравнений теории прохождения частиц через вещество в рамках преподавания данного курса. Оценивается бóльшая эффективность сопряженного подхода в задачах теории переноса, связанная с ожидаемой более высокой достоверностью дифференциальных сечений рассеяния в области низких энергий, актуальной для сопряженного подхода. Обсуждается обоснованность соответствующей терминологии.

Annotation

In this paper we discusses the use of the direct and adjoint approaches in deriving the equations of the theory of particle passage through matter as part of the teaching of this course. The greater effectiveness of the adjoint approach in transport theory problems is evaluated, due to the expected higher accuracy of the differential scattering cross-sections in the low-energy region, which is relevant for the approach. The validity of the corresponding terminology is discussed.

Ключевые слова: теория переноса, интегро-дифференциальные уравнения, сопряженный подход, функция источника, функция детектора.

Keywords: transfer theory, integro-differential equations, adjoint approach, source function, and detector function.

Введение

Работа посвящена обсуждению формулирования основных уравнений теории переноса излучения, используя как прямой, так и сопряженный подход. Возможность альтернативного пути решения задачи в физике недостаточно явно исследуется на уровне сопоставления двух подходов. Индукция и дедукция, реализованные в виде дифференциального и интегрального подхода в решении задач физики не исчерпывают возможных существенных альтернатив в решении задач. В данной работе проводится сопоставление прямого и сопряженного подхода при выводе уравнений теории переноса излучения.

Основная задача теории прохождения частиц через вещество заключается в вычислении показаний детектора (функция D), которое создается известным источником (функция S) [1, 2]. Для решения данного вопроса необходимо знать плотность потока частиц или, как мы обсудим в дальнейшем, сопряженную функцию ценности.

Для облегчения восприятия уравнений достаточно ограничимся одномерной нестационарной задачей прохождения частиц через вещество с учетом поглощения (макроскопическое сечение поглощения Σ_n) и рассеяния (макроскопическое сечение рассеяния Σ_s).

Дифференциальная по энергии функция потока частиц $\Phi(x, E, t)$ равна числу частиц с энергией из единичного интервала около E, пересекающих в единицу времени около момента t координату x. Функцией ценности $\Phi^+(x, E, t)$ частицы, вылетающей с энергией E в момент t, в точке с координатой x, назовем среднее значение показаний детектора, определяемое всей траекторией частицы вплоть до её гибели или вылета из системы [2].

В работе будут получены уравнения теории прохождения частиц через вещество в рамках прямого и сопряженного подходов. Проведено сопоставление удобства использования и эффективности этих уравнений. Обсуждается правомерность использования понятия «сопряженный подход».

Уравнения теории прохождения частиц через вещество

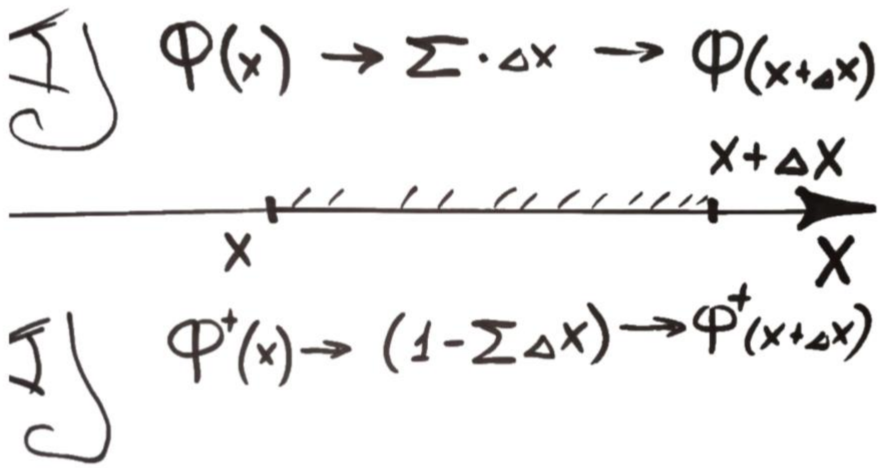

Рис.: Иллюстрация к выводу уравнений прямого и сопряженного подхода

Полное сечение в этой задаче — это суммарная вероятность испытать на единице длины пути поглощение либо какое-то рассеяние:

$\Sigma = \Sigma_{п} + \int_0^E \Sigma_s(E \to E')dE'$.

Для вывода уравнения выберем интервал *(x; x+Δx)* на траектории частиц и запишем равенство, регистрирующее все процессы, которые влияют на искомые функции:

$$\Phi(x + \Delta x, E, t + \Delta t)\Delta E\Delta t = \\ = \Phi(x, E, t)\Delta E\Delta t - \Sigma\, v\Delta t\, \Phi(x, E, t)\, \Delta E\, \Delta t + S(x, E, t)v\Delta t\, \Delta E\Delta t \\ + + \int_E^{\infty} \Sigma_S(E' \to E)dE'\, v\, \Delta t\, \Delta E\, \Phi(x, E', t)\, dE'\, \Delta t.$$

Здесь v – скорость движение частиц. На качественном уровне структура уравнения следующая: количество частиц на правой границе в конце интервала наблюдения равняется количеству частиц на левой границе нашего интервала в начале наблюдения за вычетом вероятности испытать взаимодействие на нашем отрезке умноженной на количество частиц левой границы (т.е. количество частиц испытавших какое-либо взаимодействие) плюс число частиц, порожденных источником на выбранном участке и плюс количество частиц, которые принадлежали «неинтересному» интервалу по энергии, но в результате взаимодействия перешедших в выбранный для наблюдения интервал (сечение рассеяния, т.е. перехода по энергии, умножаем на длину интервала и число частиц, способных к переходу, а затем по всем типам таких частиц суммируем, т.е. интегрируем).

Перейдем к сопряженному подходу:

$$\Phi^{+}(x, E, t) = \Phi^{+}(x+\Delta x, E, t+\Delta t)(1-\Sigma\, v\Delta t) +$$

$$+D(x, E, t) v\Delta t + \int_0^E \Sigma_s(E \to E')dE'\, v\, \Delta t\, \Phi^{+}(x, E', t).$$

Ценность частиц на левой границе интервала равна ценности на правой границе, умноженная на вероятность отсутствия взаимодействия на выбранном интервале плюс вклад в показания детектора непосредственно от факта наличия интервала в траектории и прибавляем суммарную (проинтегрированную) ценность от всех вариантов нашей частицы после рассеяния.

Раскладываем функции в ряд Тэйлора, удерживая только линейные слагаемые:

$$f(x+\Delta x,\ E,\ t+\Delta t) == f(x,\ E, t) + (\partial f/\partial t)_x\, \Delta t + (\partial f/\partial x)_t\, \Delta x + \ \dots$$

В результате получаем привычные формы записи уравнений переноса. Для прямого подхода:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Sigma\, \Phi(x,\ E,\ t) + \int_E^{\infty} \Sigma_s(E' \to E)\ \Phi(x, E', t)\ dE' = S(x, E, t),$$

а для сопряженного уравнения:

$$-\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi^{+}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi^{+}}{\partial x} + \Sigma\ \Phi^{+}(x,\ E,\ t) + \int_0^{E} \Sigma_s(E \to E')\ \Phi^{+}(x, E', t)\ dE' = D(x, E, t),$$

Мы получили схожие по «конструкции» интегро-дифференциальные уравнения, которые имеют несколько отличий. Прежде всего разные знаки перед производной, которые, естественно, не оказывают влияния на решение задачи. А вот разные диапазоны в интеграле рассеяния уже могут менять трудоемкость и точность решения существенно, так как ядро интегрального слагаемого в виде сечения рассеяния наверняка гораздо лучше изучено экспериментально в низком диапазоне энергий [3,4,5]. Последним компонентом в прямом уравнении является функция источника, нередко определяемая внешними обстоятельствами, в то время как в сопряженном подходе — функция детектора, всегда определяется наблюдателем.

Обоснование понятий прямого и сопряженного подхода

Формально обозначим линейные операторы наших интегро-дифференциальных уравнений, влияющие на функцию потока и ценности, как $\hat{L}$ и $\hat{L}^{+}$:

$$\hat{L} = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \Sigma\,\cdot\; + \int_E^{\infty} \Sigma_s(E' \to E)\cdots \mathrm{dE'},$$

$$\hat{L}^{+} = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} + \Sigma\;\cdot + \int_0^{E} \Sigma_s(E \to E')\;\cdots \mathrm{dE'}.$$

В таких обозначениях мы получаем компактную запись уравнений переноса:

$$\hat{L}\Phi(x,\,E,t) \;=\; S(x,\,E,t),$$

$$\hat{L}^{+}\Phi^{+}(x,\,E,t) \;=\; D(x,\,E,t),$$

Поскольку за время dt фазовый объем $dxdE$ источника испускает $S(x,\,E,\,t)dxdEdt$ частиц, а вклад в показания детектора каждой из них $\Phi^{+}(x,\,E,\,t)$, то, суммируя сигнал аддитивного детектора, обусловленный всеми частицами, получим показания:

$$J \;=\; \iiint\; S(x,\,E,\,t)\,\Phi^{+}(x,\,E,\,t)\,dx\,dE\,dt.$$

С другой стороны, каждая частица в потоке Ф(x, E, t) несет вклад в показания детектора:

$$J \;=\; \iiint\; D(x,\,E,\,t)\,\Phi(x,\,E,\,t)\,dx\,dE\,dt.$$

Подставив выражения для источника и детектора из наших уравнений, получим выражение, подтверждающее справедливость использования понятия «сопряженный подход»:

$$\iiint\; \Phi^{+}\,\hat{L}\Phi\;dxdEdt \;=\; \iiint\; \Phi\,\hat{L}^{+}\,\Phi^{+}\,dxdEdt.$$

Давайте взглянем также на операторы наших уравнений порознь. По определению сопряженного оператора:

$$\int f(x)\,\hat{A}\,g(x)\,dx = \int g(x)\,\hat{A}^{+} f(x)\,dx$$

для наших операторов $\hat{L}$ и $\hat{L}^{+}$ очевидным является сопряженность третьего слагаемого, так как сомножитель мы можем переставлять свободно. Для первого и второго слагаемого с целью получения вида сопряженного оператора нужно прибегнуть к интегрированию по частям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)_t dx = f(x)g(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)_t dx$$

Для интегрального слагаемого достаточно поменять местами порядок интегрирования по переменным интегрального ядра:

$$\int_0^{\infty} dx\, f(x)\int_x^{\infty} dx'\ \Sigma_s(x' \to x)g(x') = \int_0^{\infty} dx'\, g(x')\int_0^{x} dx\, \Sigma_s(x' \to x)f(x)$$

Итак, мы видим справедливость, в математическом смысле, использования понятия сопряженного подхода для операторов наших уравнений.

Заключение

В работе проведено сопоставление прямого и сопряженного подходов для решения задачи прохождения частиц через вещество. Математический аппарат уравнения для функции ценности действительно соответствует математическому понятию сопряжения. Полученные в работе одномерные нестационарные уравнения переноса с учетом поглощения и рассеяния частиц имеют схожую структуру интегро-дифференциальных уравнений, однако использование в интеграле рассеяния диапазона низших энергий делает сопряженный подход более предпочтительным.

Литература

1. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. Москва, Изд-во Мир, 1972. – 382 с.
2. Кольчужкин А.М., Учайкин В.В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. Москва, Изд-во Атомиздат, 1978. – 256 с.
3. Лагутин А.А. Применение сопряженных уравнений для расчета характеристик электронно-фотонных каскадов. – Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Томск, 1978. – 20 с.

4. Lagutin A.A., Uchaikin V.V. Adjoint Cascade Theory in Astroparticle Physics // Известия Алтайского госуниверситета. Спец. выпуск. – Барнаул: Изд-во АГУ. – 1998. – С. 4–32.
5. Кольчужкин А.М. Введение в теорию столкновений. — Томск : Изд-во Том. ун-та, 1979. — 141 с.