УДК 517.955

***Бушков С.В.***
доцент, к.ф.м.н.,
Самарский национальный исследовательский университет имени
академика С.П. Королева

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассматривается один из трехмерных аналогов уравнения Эйлера-Дарбу с параметрами, равными единице на множестве пространства $R_3$, ограниченного плоскостями $z=0$, $z=h$, $x=h$, $y=0$, $y=x$. Во введённых авторами специальных классах решены две краевые задачи, в которых, кроме граничных условий, задаётся среднее значение искомого решения по одной из переменных на внутреннем отрезке, параллельном соответствующей координатной оси.

**Ключевые слова:** краевая задача, гиперболическое уравнение, уравнение Эйлера- Дарбу, задача Коши, общее решение, метод Римана.

One of the three-dimensional analogues of the Euler-Darboux equation with parameters equal to one on the set of space R3 bounded by the planes z=0, z=h, x=h, y=0, y=x is considered . In the special classes introduced by the authors, two boundary value problems are solved, in which, in addition to boundary conditions, the average value of the desired solution is set for one of the variables on the inner segment parallel to the corresponding coordinate axis.

**Keywords**: boundary value problem, hyperbolic equation, Euler-Darboux equation, Cauchy problem, general solution, Riemann method.

Введение

Уравнение $(z+y-x)\,U_{xyz}+U_{xz}-U_{yz}=0$ (1)

рассматривается на множестве $H=H^{-}UH^{+},\ \ H^{-}=\left\{(x,y,z)\left|\begin{matrix}0<y<x<h,\\0<z<x-y\end{matrix}\right.\right\}$,

$H^{+}=\left\{(x,y,z)\left|\begin{matrix}0<x<y<h,\\x-y<z<h\end{matrix}\right.\right\},\ \ h<0.$

Значения коэффициентов уравнения $(\alpha=\beta=1)$ говорят о сильном вырождении решения уравнения Эйлера-Дарбу на плоскости $z=x-y$.

Методом Римана решаются видоизменённые задачи типа Коши (задача $C_3$) и Коши-Гурса ($C_3$ - $G$) с данными на плоскости $z=x-y$ в области $H^{-}$.

За счет интегрального представления одного из граничных условий задачи $C_3-G$ решение значительно упрощается (введение специальных классов ${}_oV,\ V_h$) и применяется для решения задач в более сложной области с условиями сопряжения на внутренней части плоскости $z=x-y$ (задачи $I_0, I_h$)

<u>Задача $C_3$.</u> На множестве $H^{-}$ найти решение уравнения (1) с данными:

$$\lim_{z\to x-y-0}\left[U+(x-y-z)U_z\ln(x-y-z)\right]=\xi(x,y)\,,\ (x,y)\in\overline{D}_0$$

$$D_0=\left\{(x,y)\middle|0<y<x<h\right\};\qquad (2)$$

$$\lim_{z\to x-y-0}(x-y-z)U_z=\nu(x,y)\,,\ \ (x,y)\in D_0\,;$$

$$\lim_{z\to x-y-0}\left\{\left[U_{zx}-U_{zy}\right](x-y-z)-2U_z\right\}=\mu(x,y)\,,(x,y)\in D_0 \qquad (3)$$

(4)

Проводя традиционные для метода Римана рассуждения [1], получаем

$$U(x,y,z)=\tau(x,y)-\frac{1}{2}\int_z^{x-y}\left[\frac{\partial\nu(x,x-t)}{\partial t}+\frac{\partial\nu(t+y,y)}{\partial t}\right]\cdot\ln(x-y-t)dt-$$
$$-\frac{1}{2}\ln(x-y-z)\left[\nu(x,x-z)+\nu(z+y,y)\right]-\frac{1}{2}\ln\int_z^{x-y}\frac{dt}{x-y-t}\int_y^{x-t}\mu(t+s,s)ds \quad (5)$$

Проверкой показано, что при выполнении условий

$$\tau\in C(\overline{D}_0),\ \tau_{xy}\in C(D_0),\ \nu_{xy}\in C(D_0),\ \mu\in C^{(1)}(D_0)\ , \quad (6)$$

функция (5) есть решение задачи $C_3$. Единственность решения следует из метода Римана.

<u>Задача $C_3$ – $G$.</u> На множестве $H^-$ найти решение уравнения (1) с данными (3), (4) и

$$U(x,y,0)=\varphi(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}_0, \quad (7)$$

$$\varphi_{xy}\in C(D_0),\ \varphi\in C(\overline{D}_0). \quad (8)$$

Полагая в решении (5) $z=0$, подчиняем функцию условию (7), находим выражение для $\tau(x,y)$, которое подставляем в формулу (5). После интегрирования по частям получаем

$$U(x,y,z)=\varphi(x,y)+\frac{1}{2}\int_0^z\frac{\nu(x,x-t)+\nu(y+t,y)}{x-y-t}dt-\frac{1}{2}\int_0^z\frac{dt}{x-y-t}\int_{y+t}^{x}\mu(s,s-t)ds \quad (9)$$

## <u>§2 Специальные классы решений.</u>

<u>Определение 1.</u> Будем говорить, что решение (9) уравнения (1) принадлежит классу ${}_0V$, если имеет место представление

$$\nu(x,y)=\int_0^y T(\xi,x-y)d\xi\ ,\ T(x,y)=\overline{D}_0 \tag{10}$$

Подставляя выражение (10) в функцию (9), после ряда преобразований имеем

$$U(x,y,z)=\varphi(x,y)+\int_0^z (x-y-t)^{-1}\left[\int_0^y T(s,t)ds+\int_y^{x-t} N(s,t)ds\right]dt\ , \tag{11}$$

$$N(s,t)=\frac{1}{2}\left[T(s,t)+\mu(s+t,s)\right]. \tag{12}$$

Определение 2. Будем говорить, что решение (9) принадлежит классу $V_h$, если

$$\nu(x,y)=\int_x^h T_1(\xi,x-y)d\xi\ ,\ \ T_1\in\overline{D}_0 \tag{13}$$

Вид решения (9) в классе $V_h$

$$U(x,y,z)=\varphi(x,y)+\int_0^z (x-y-t)^{-1}dt\left[\int_x^h T_1(s,t)ds+\int_{y+t}^x N_1(s,t)ds\right], \tag{14}$$

$$N_1(s,t)=\frac{1}{2}\left[T_1(s,t)+\mu(s,s-t)\right]. \tag{14°}$$

Аналогичным рассуждением получаем в области $H^+$ решение задачи $C_3-G$ с данными:

$$U(x,y,z)=\varphi^*(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}_0, \tag{15}$$

$$\lim_{z\to x-y+0}(z+y-x)U_z=\nu^*(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}_0\ , \tag{16}$$

$$\lim_{z\to x-y+0}\left[(U_{zy}-U_{zx})(z+y-z)+2U_z\right]=\mu^*(x,y),\ (x,y)\in D_0. \tag{17}$$

В классе ${}_0V$ :

$$U(x,y,z)=\varphi^*(x,y)-\int_z^h \frac{dt}{t+y-x}\left[\int_0^y T^*(s,t)ds+\int_{x-t}^y N^*(s,t)ds\right], \qquad (18)$$

где:

$$\nu^*(x,y)=\int_0^y T^*(\xi,x-y)d\xi, \qquad (19)$$

$$N^*(s,t)=\frac{1}{2}\left[\mu^*(s+t,s)-T^*(s,t)\right]. \qquad (20)$$

В классе $V_h$:

$$U(x,y,z)=\varphi^*(x,y)-\int_z^h \frac{dt}{t+y-x}\left[\int_x^h T_1^*(s,t)ds+\int_{x.}^{y+t} N_1^*(s,t)ds\right], \qquad (21)$$

$$N_1^*(s,t)=\frac{1}{2}\left[\mu^*(s,s-t)-T_1^*(s,t)\right], \qquad (22)$$

$$\nu^*(x,y)=\int_x^h T_1^*(\xi,x-y)d\xi. \qquad (23)$$

## §3 Постановка и решение краевых задач с интегральным условием.

Задача $I_h$. На множестве $H$ найти решение уравнения (1) с условиями (7), (15), а также

$$U(h,y,z)=\Phi(y,z),\quad (y,z)\in\overline{D}_1,\quad D_1=\left\{(y,z)\left|\begin{matrix} h-z<y<h \\ 0<z<h \end{matrix}\right.\right\}, \qquad (24)$$

$$\int_0^a U(x,\xi,z)d\xi=\psi(x,z),\qquad 0<a<x-z, \qquad (25)$$

$$(x,y)\in\overline{D}_2,\qquad D_2=\left\{(x,z)\middle|0<z<x<h\right\}.$$

На плоскости $z=x-y$ выполняются условия сопряжения:

$$\nu(x,y)=\nu^*(x,y), \tag{26}$$

$$\mu(x,y)=-\mu^*(x,y), \tag{27}$$

Функции $\nu$, $\nu^*$, $\mu$, $\mu^*$ определим соотношениями (3), (4), (16), (17).

Условия, налагаемые на данные задачи $I_h$.

$$\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x\partial y}\in C(\overline{D}_0)\qquad \int_0^a\varphi(x,t)dt=0; \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2\varphi^*(x,y)}{\partial x\partial y}\in C(\overline{D}_0)\qquad \varphi^*(h,y)=0; \tag{29}$$

$$\psi(x,z)\in C^{(2)}(D_2),\quad \psi(x,0)=0,\quad \psi_t^{'}(h,t)=0; \tag{30}$$

$$\Phi(y,z)\in C^{(2)}(D_1),\quad \Phi(y,h)=\Phi_z^{'}(0,z)=0,\quad \int_0^a\Phi_z^{'}(\xi,z)d\xi=0 \tag{31}$$

За основу решения задачи $I_h$ возьмем решение уравнения (1) на множестве $H=H^-UH^+$, определяемое формулами (14), (21), удовлетворяющее граничным условиям (7), (15). Из условий сопряжения (26), (27), представлений (13), (14°), (22), (23) получаем

$$T_1=T_1^*, \tag{32}$$

$$N_1=-N_1^*. \tag{33}$$

Неизвестные функции $N_1$ и $T_1$ найдем из условий (24), (25). Из условия (24) имеем

$$N_1(s,t)=\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(s-t,t)(s-h)\right]. \tag{34}$$

Выражение для $N_1$ подставим в функцию (14) и подчиним её условию (25). В результате находим

$$\int_x^h T_1(s,t)ds=\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\ln^{-1}\frac{x-t}{x-t-a}+\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x-t,t)(x-h)-\ln^{-1}\frac{x-t}{x-t-a}\cdot$$

$$\cdot\int_0^a\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\xi,t)\frac{\xi+t-h}{x-\xi-t}d\xi\,. \tag{35}$$

Окончательно получаем, что при выполнении условий (28)-(31) решение задачи $I_h$ определяется функцией в области $H^-$:

$$U(x,y,z)=\varphi(x,y)+\int_0^z(x-y-t)^{-1}\left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\ln^{-1}\frac{x-t}{x-t-a}+\ln^{-1}\frac{x-t}{x-t-a}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^a\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\xi,t)\frac{\xi+t-h}{\xi+t-x}d\xi+\frac{\partial}{\partial t}\Phi(y,t)(y+t-h)\right]dt\,. \tag{36}$$

и в области $H^+$:

$$U(x,y,z)=\varphi^*(x,y)-\int_z^h(t+y-x)^{-1}\left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\ln^{-1}\frac{x-t}{x-t-a}+\ln^{-1}\frac{x-t}{x-t-a}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^a\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\xi,t)\frac{\xi+t-h}{\xi+t-x}d\xi+\frac{\partial}{\partial t}\Phi(y,t)(y+t-h)\right]dt\,. \tag{37}$$

<u>Задача $I_0$ .</u> На множестве $H$ найти решение уравнения (1) класса ${}_0V$ в $H^-$ и $H^+$ с условиями (7), (15), (26), (27), а также

$$U(x,0,z)=\Psi(x,z),\quad (x,z)\in\overline{D}_3,\quad D_3=\left\{(x,z)\middle|0<x<z<h\right\}, \tag{38}$$

$$\int_b^h U(\xi,y,z)d\xi = f(y,z), \quad (y,z)\in \overline{D}_1*, \quad D_1* = \left\{(y,z)\left|\begin{matrix}0<y<h-z\\ 0<z<h\end{matrix}\right.\right\} \tag{39}$$

при выполнении условий

$$(\varphi_{xy},\varphi^*_{xy})\in C(D_0), \quad \varphi*(x,0)=0 \quad \int_b^h \varphi(\xi,y)d\xi = 0; \tag{40}$$

$$\chi(y,z)\in C^{(2)}(D_1*) \quad \chi(y,0)=\chi'_z(0,z)=0; \tag{41}$$

$$\Psi(x,z)\in C^{(2)}(D_2), \quad \Psi(x,h)=0, \quad \int_b^h \frac{\partial\Psi(\xi,z)}{\partial z}d\xi = 0 \ . \tag{42}$$

За основу решения задачи $I_0$ возьмем функцию, определяемую формулами (11), (18), в которых, с учетом условий сопряжения (26), (27), положим $T=T*$, $N=-N*$. Из условий (38), (39) находим

$$N(s,t)=\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial\Psi(t+s,t)}{\partial t}\cdot s\right], \tag{43}$$

$$\int_0^y T(s,t)ds = -\ln^{-1}\frac{(h-y-t)}{b-y-t}\int_b^h \frac{\xi-t}{\xi-t-y}\cdot\Psi'_t(\xi,t)d\xi + y\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t+y,t)+$$

$$+\ln^{-1}\frac{(h-y-t)}{b-y-t}\cdot\frac{\partial\chi(y,t)}{\partial t}. \tag{44}$$

Подставляя выражения (43), (44) в формулы (11), (18) получаем решение задачи $I_0$

$$U(x,y,z)=\varphi(x,y)+\int_0^z (x-y-t)^{-1}\left[\frac{\partial\chi(y,t)}{\partial t}\ln^{-1}\frac{h-y-t}{b-y-t}-\ln^{-1}\frac{h-y-t}{b-y-t}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_b^h \frac{\xi-t}{\xi-t-y}\Psi'_t(\xi,t)d\xi+\Psi'_t(x,t)(x-t)\right]dt \tag{45}$$

в области $H^-$ и

$$U(x,y,z)=\varphi^*(x,y)+\int_z^h (t+y-x)^{-1}\left[\frac{\partial\chi(y,t)}{\partial t}\ln^{-1}\frac{h-y-t}{b-y-t}-\ln^{-1}\frac{h-y-t}{b-y-t}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_b^h \frac{\xi-t}{\xi-t-y}\frac{\partial\Psi(\xi,t)}{\partial t}d\xi+2\cdot\frac{\partial\Psi(t+y,t)}{\partial t}\cdot y-(x-t)\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\right]dt \qquad (46)$$

в области $H^+$.

Единственность решения обеих задач $I_0$, $I_h$ следует из единственности решения задачи $C_3$, полученного методом Римана и взятого за основу. Существование решения доказано проверкой.

На плоскости $z=x-y$ решение обеих задач обращается в бесконечность логарифмического порядка. В любой замкнутой области $\overline{O}\subset H$, не содержащей точек плоскости $z=x-y$ решение задач $I_0$, $I_h$ является классическим.

## Список использованных источников


1. Волкодавов В.Ф., Родионова И.Н., Бушков С.В. Решение видоизмененной задачи Коши методом Римана для одного пространственного аналога уравнения Эйлера-Дарбу с отрицательными параметрами // Дифференц. уравнения. – 2000, -36, т.4. – с. 616-619.

2. Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск: Вышэйшая школа. 1977. 301с.

3. Volkodavov V.F., Rodionova Y.N., Bushkov S.V. Solution of modified Cauchy problem by the Rieman method for certain spatial analog of the Euler-Darboux equation with a negative parameter. Differential Equa- tions. 2000. T.36 No4. C. 616-619.