

Марченко Владислав Вадимович,

студент, Новосибирский государственный технический университет, г.

Новосибирск

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА ФОРМУ NURBS –ПОВЕРХНОСТЕЙ

Аннотация

В статье экспериментально исследуется влияние весовых коэффициентов контрольных точек на форму NURBS-поверхностей. Разработано программное приложение на C++/OpenGL. Установлено, что увеличение веса приводит к притяжению поверхности к контрольной точке. При весе 20.0 поверхность практически совпадает с точкой. При дальнейшем увеличении веса до 30 и 50 визуальных изменений уже почти не заметно. Полученные результаты подтверждают теоретические положения.

Annotation

The article experimentally investigates the influence of weight coefficients of control points on the shape of NURBS surfaces. A software application in C++/OpenGL is developed. It is found that increasing the weight leads to attraction of the surface to the control point. At weight 20.0, the surface almost coincides with the point. With further increase in weight to 30 and 50, visual changes are almost imperceptible. The results confirm theoretical principles.

Ключевые слова: NURBS, весовые коэффициенты, геометрическое моделирование, B-сплайны, C++, OpenGL.

Keywords: NURBS, weight coefficients, geometric modeling, B-splines, C++, OpenGL.

NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) являются стандартом де-факто для представления кривых и поверхностей в системах автоматизированного проектирования. Как отмечают Пьегл и Тиллер в своей фундаментальной

монографии, NURBS объединяют в себе преимущества В-сплайнов и рациональных кривых [1]. Ключевой особенностью NURBS, отличающей их от обычных В-сплайнов, являются весовые коэффициенты. Поверхность NURBS задаётся формулой тензорного произведения:

$$S(u, v) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l R_{i,j}(u, v) \mathbf{P}_{i,j}$$

с

$$R_{i,j}(u, v) = \frac{N_{i,n}(u)N_{j,m}(v)w_{i,j}}{\sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^l N_{p,n}(u)N_{q,m}(v)w_{p,q}},$$

где \mathbf{P}_{ij} – контрольные точки, w_{ij} – весовые коэффициенты, $N_{i,p}(u)$ и $N_{j,q}(v)$ – В-сплайновые базисные функции. Как подчёркивает де Бур в своей классической работе, эти функции определяются рекурсивно [2]:

$$C(u) = \sum_{i=1}^k \frac{N_{i,n}(u)w_i}{\sum_{j=1}^k N_{j,n}(u)w_j} \mathbf{P}_i = \frac{\sum_{i=1}^k N_{i,n}(u)w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=1}^k N_{i,n}(u)w_i}$$

Роджерс в своём историческом обзоре отмечает, что способность NURBS точно представлять как аналитические поверхности (плоскости, сферы, конусы), так и свободные формы делает их незаменимыми в CAD-системах [3]. При всех $w_{ij} = 1$ NURBS-поверхность вырождается в обычный В-сплайн. Изменение веса конкретной контрольной точки изменяет "силу притяжения" поверхности к этой точке. Однако, как отмечают Шикин и Плис, в учебной литературе влияние весов часто описывается только математически, без наглядной демонстрации [4]. Цель данной работы – экспериментальное исследование влияния весовых коэффициентов на форму NURBS-поверхности.

Для проведения экспериментов разработано программное приложение на языке C++ с использованием библиотеки OpenGL (GLUT). Согласно подходу, описанному Фаренкоффом и Ляйеном, вычислительные аспекты геометрического моделирования требуют внимания к численной устойчивости

и интерактивности [5]. Программа позволяет изменять вес выбранной контрольной точки клавишами Q (+0.1) и W (-0.1) с ограничением диапазона от 0.1 до 50.0, а также визуализировать поверхность в различных режимах.

Эксперимент проводился на бикубической NURBS-поверхности (степень $p = q = 3$) с сеткой контрольных точек размером 6×6 , созданной на основе синусоидальной функции. Исходное распределение весов – равномерное ($w_{ij} = 1.0$). Для выбранной центральной контрольной точки вес последовательно увеличивался, после чего фиксировались визуальные изменения формы поверхности.

На рисунке 1 показана поверхность при всех весах, равных 1.0. Этот случай является эталонным – поверхность ведёт себя как обычный B-сплайн.

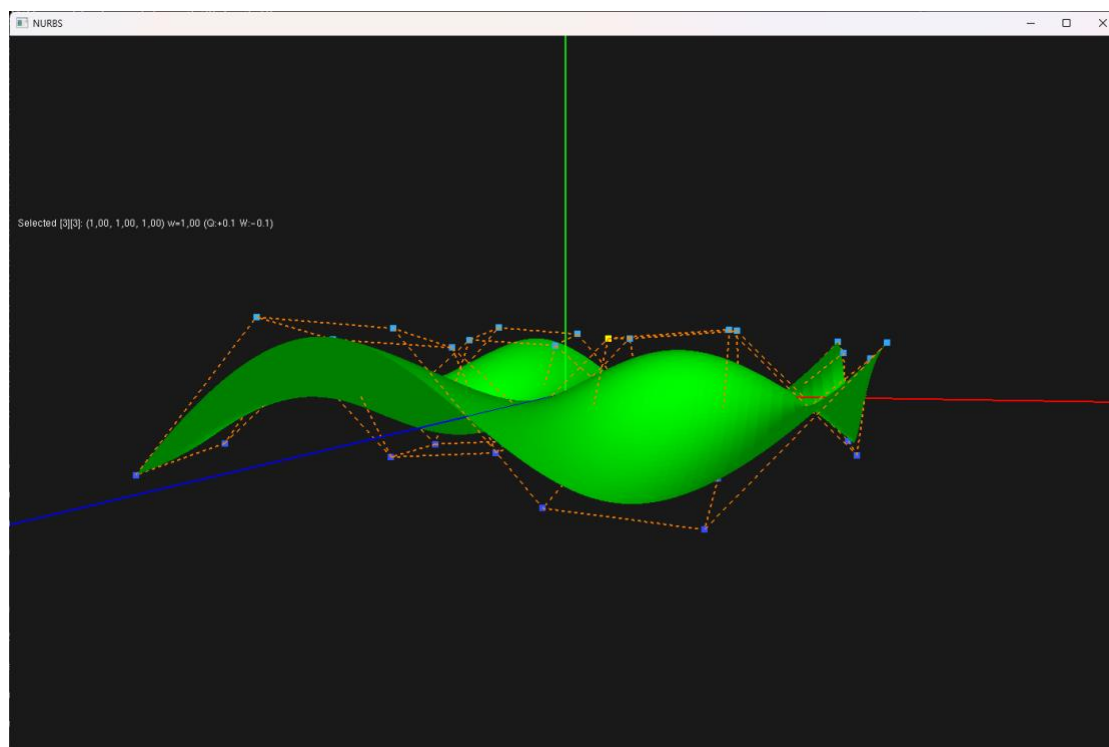


Рисунок 1 – все веса = 1.0.

При увеличении веса выбранной контрольной точки до 3.0 наблюдается локальное «притягивание» поверхности к этой точке (рисунок 2). Деформация носит локальный характер – изменяется форма в окрестности точки, что полностью соответствует теории B-сплайнов [2].

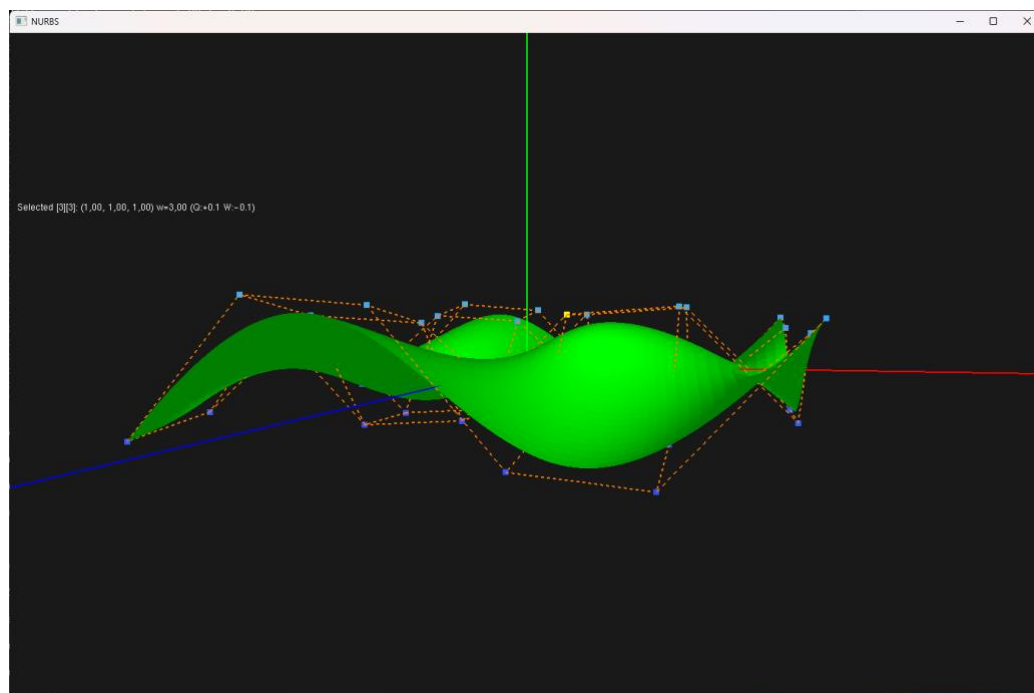


Рисунок 2 – вес = 3.0.

При дальнейшем увеличении веса до 7.0 притяжение становится сильнее (рисунок 3).

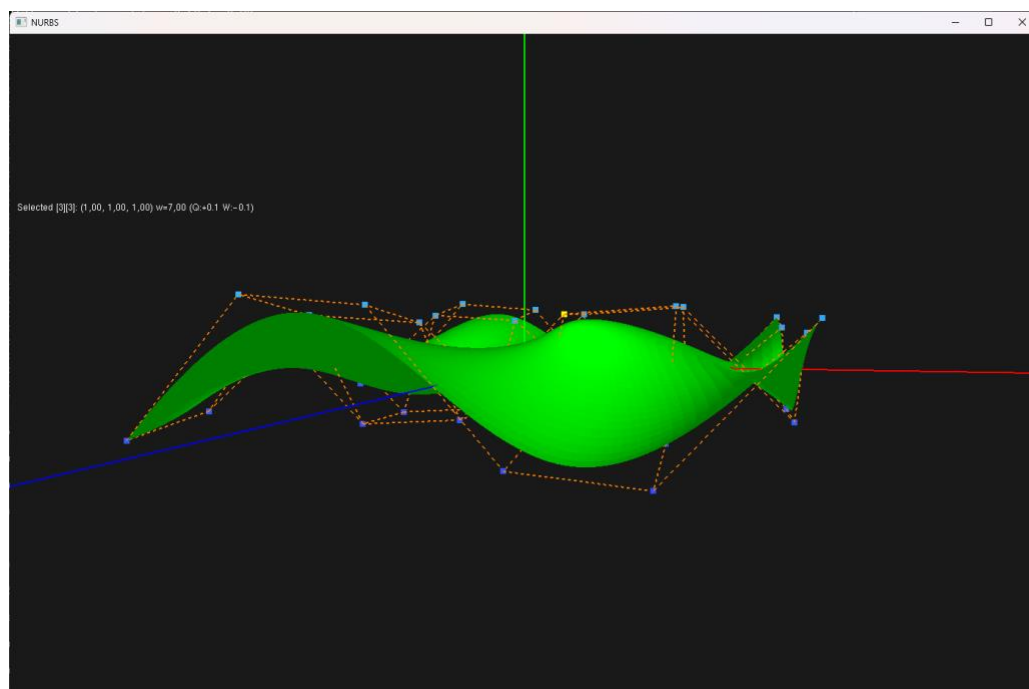


Рисунок 3 – вес = 7.0.

При весе 20.0 поверхность практически совпадает с положением контрольной точки (рисунок 4). Этот эффект согласуется с утверждением Пьегла и Тиллера о том, что при $w \rightarrow \infty$ поверхность стремится к контрольной точке [1].

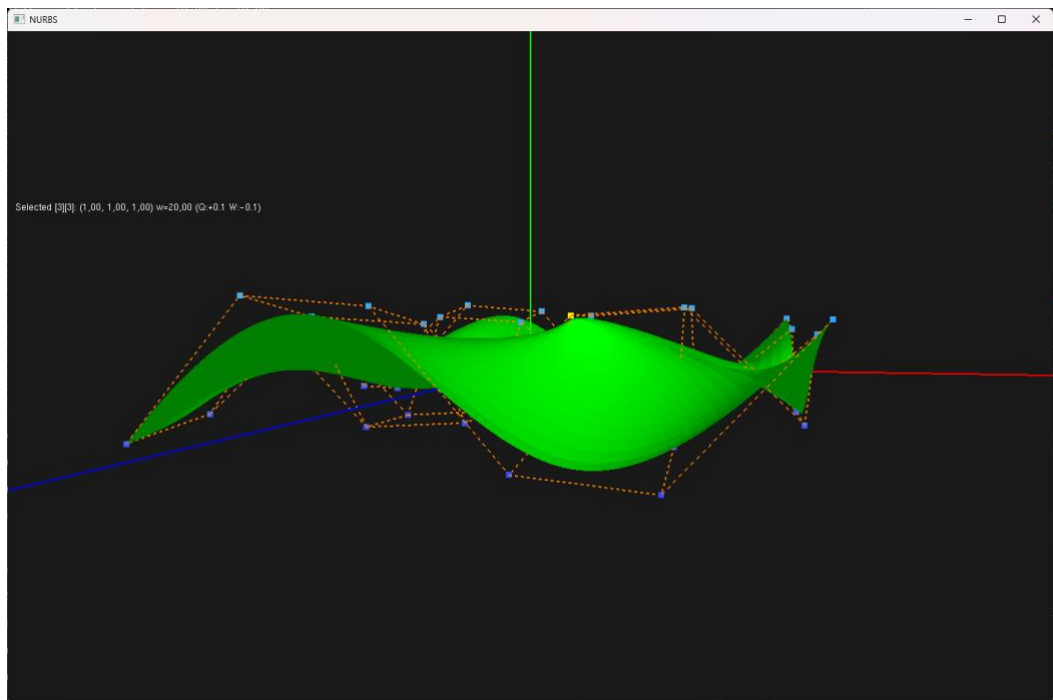


Рисунок 4 – вес = 20.0.

Чтобы проверить, меняется ли форма дальше, я увеличил вес до 30.0, а затем до 50.0. На рисунках 5 и 6 видно, что визуальных отличий от веса 20.0 практически нет. Поверхность уже "слиплась" с точкой, и глаз не замечает разницы.

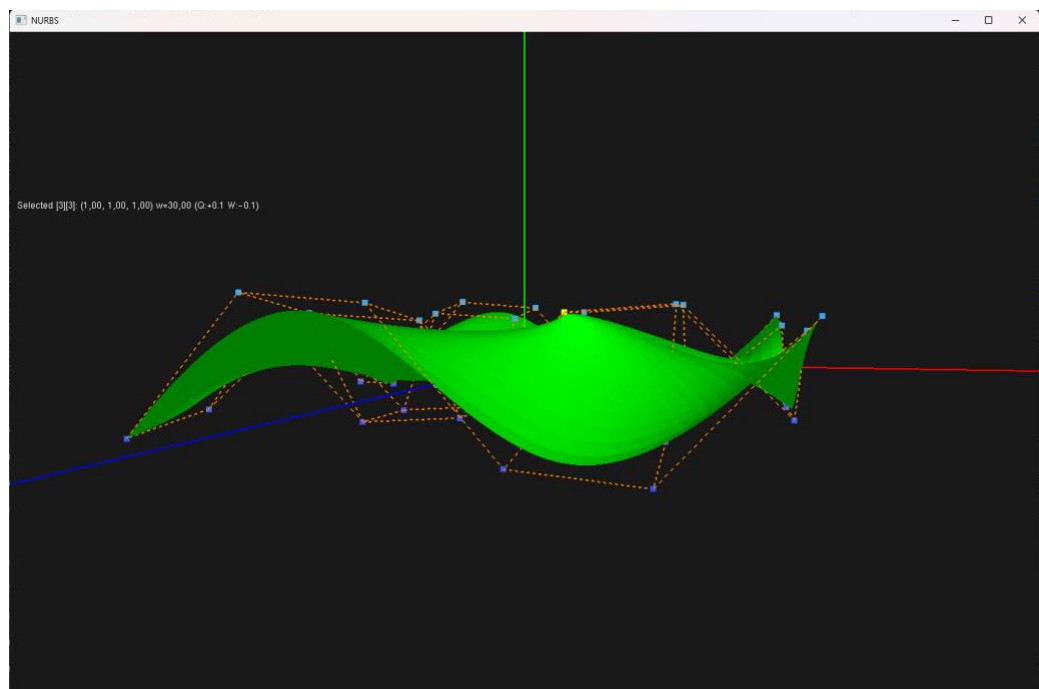


Рисунок 5 – вес = 30.0.

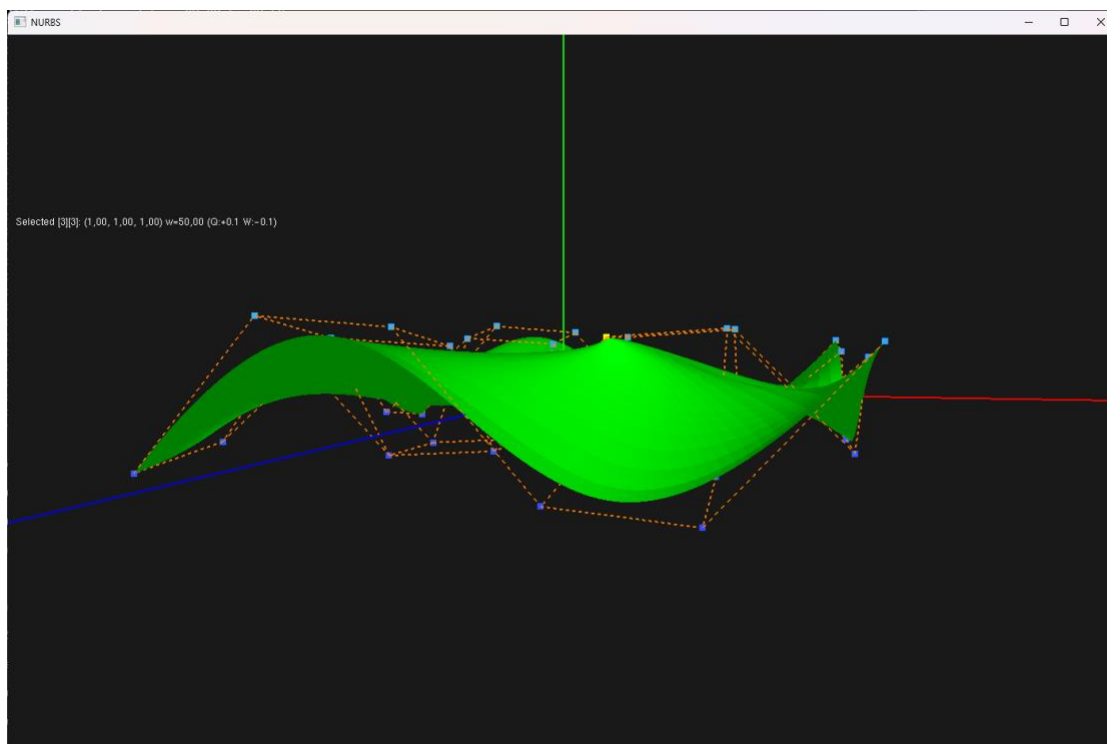


Рисунок 6 – вес = 50.0.

Полученные результаты полностью соответствуют математической теории. Как отмечено в выводах к отчёту: «Чем больше вес точки, тем сильнее к ней тянется плоскость». Экспериментально установлено, что после $w \geq 20$ дальнейшее увеличение веса уже не даёт заметных визуальных изменений. Роджерс подчёркивает, что возможность изменения весов без перемещения контрольных точек является ключевым преимуществом NURBS перед обычными B-сплайнами [3]. Шикин и Плис отмечают, что наглядная визуализация этого эффекта крайне важна для понимания геометрического моделирования [4].

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что изменение весов позволяет корректировать форму поверхности без перемещения контрольных точек, что важно для тонкой настройки геометрических моделей в CAD-системах [1, 3].

В результате проведённого исследования:

1) разработан интерактивный программный инструмент на C++/OpenGL для визуального исследования NURBS-поверхностей;

2) экспериментально подтверждено, что увеличение веса приводит к притяжению поверхности к контрольной точке;

3) установлено, что при $w \geq 20$ дальнейшее увеличение веса (до 30, 50 и выше) уже не даёт заметных визуальных отличий.

Список литературы

1. Piegl L., Tiller W. The NURBS Book. – 2nd ed. – Springer, 1997. – 646 p.
2. De Boor C. A Practical Guide to Splines. – Springer, 2001. – 392 p.
3. Rogers D.F. An Introduction to NURBS with Historical Perspective. – Morgan Kaufmann, 2001. – 324 p.
4. Шикин Е.В., Плис А.И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996. – 240 с.
5. Фаренкопф Р., Ляйен Д. Вычислительные аспекты геометрического моделирования // Computer Graphics Forum. – 2019. – Vol. 38, No. 2. – P. 521-536.