

УДК 004.02

Гайфуллин Артем Олегович, магистрант 2 курса, Кубанский
государственный аграрный университет имени И.Т. Трубилина, г. Краснодар

Вострокнутов Александр Евгеньевич, кандидат экономических наук, доцент,
Кубанский государственный аграрный университет имени И.Т. Трубилина, г.
Краснодар

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ УЧЕБНОЙ НАГРУЗКИ В ВЫСШЕМ УЧЕБНОМ ЗАВЕДЕНИИ

Аннотация

В статье рассматриваются методы оптимизации, которые могут использоваться при распределении учебных часов между преподавателями высшего учебного заведения. В качестве основных подходов выделены линейное программирование, многокритериальная оптимизация и целочисленное программирование. Показано, что каждый из методов решает свою часть задачи: линейная модель помогает формализовать ограничения по часам, многокритериальная модель позволяет учитывать несколько показателей качества, а целочисленная модель сохраняет целостность учебных блоков. На основе этого сделан вывод о целесообразности объединения многокритериального и целочисленного подходов. Для условного примера приведен расчет распределения часов с учетом годового лимита часов, уровня знания дисциплины и допустимости разных видов учебной работы.

Annotation

The article considers optimization methods that can be used to distribute academic workload among teachers of a higher education institution. Linear programming, multi-criteria optimization and integer programming are selected as the main approaches. It is shown that each method solves a separate part of the problem:

the linear model helps to formalize hour limits, the multi-criteria model allows several quality indicators to be taken into account, and the integer model preserves the integrity of academic workload blocks. On this basis, the article concludes that a combination of multi-criteria and integer approaches is reasonable. A conditional calculation example is given, taking into account the annual hour limit, the level of knowledge of the discipline and the admissibility of different types of academic work.

Ключевые слова: методы оптимизации, линейное программирование, многокритериальная оптимизация, целочисленное программирование, учебная нагрузка, распределение ресурсов, высшее образование.

Keywords: optimization methods, linear programming, multi-criteria optimization, integer programming, academic workload, resource allocation, higher education.

Введение

Во многих управленческих задачах приходится выбирать не просто любой рабочий вариант, а наиболее подходящий вариант из нескольких возможных. В информационных технологиях такие задачи обычно рассматриваются через методы оптимизации, так как они позволяют описать исходные данные, ограничения и критерии выбора решения.

Для образовательных организаций эта тема также является актуальной. В вузе регулярно требуется распределять аудитории, формировать расписание, назначать сотрудников кафедры на дисциплины и планировать объем учебных часов. На первый взгляд такие задачи могут выглядеть как обычное административное планирование. Однако при более подробном рассмотрении видно, что они содержат большое количество ограничений, а значит могут быть описаны как оптимизационные задачи.

В рамках данной статьи рассматривается пример распределения учебных часов между сотрудниками кафедры. Такая задача удобна для исследования методов оптимизации, потому что в ней одновременно присутствуют числовые и качественные параметры. С одной стороны, необходимо распределить конкретное количество часов. С другой стороны, важно учитывать, насколько специалист хорошо подходит для ведения дисциплины, какие виды учебной

работы он может выполнять, а также насколько равномерно распределяются часы между сотрудниками.

Отдельно следует учитывать целостность учебного блока. Если сотрудник кафедры назначен на определенный вид учебной работы по дисциплине, то желательно, чтобы этот блок был закреплен за ним полностью в рамках учебного года. Например, не совсем корректно разделять один блок лекций по одной дисциплине между несколькими исполнителями только для того, чтобы формально выровнять количество часов. В реальной работе кафедры такое решение может создать дополнительные сложности для студентов и для самого учебного процесса.

Цель статьи состоит в рассмотрении трех методов оптимизации и выборе подхода, который лучше подходит для задачи распределения учебных часов. В статье не рассматривается разработка информационной системы, а основное внимание уделяется принципам методов и расчетному примеру их применения.

Линейное программирование

Линейное программирование (ЛП) является мощным инструментом оптимизации, используемым для решения широкого спектра задач в экономике, производстве и других областях. Прямая задача линейного программирования заключается в максимизации или минимизации линейной функции цели при условиях, выраженных системой линейных ограничений. Симплексный метод - один из эффективных методов решения таких задач.

Если перенести этот подход на распределение учебных часов, то переменными могут быть часы, которые назначаются сотруднику кафедры по конкретной дисциплине. Например, можно задать общее количество часов по каждому предмету, максимальный объем часов на одного исполнителя и требование закрыть все часы учебного плана. После этого модель будет искать вариант распределения, при котором выполняются заданные ограничения.

Главное преимущество линейного программирования в данной задаче заключается в понятности. С его помощью удобно показать, какие ресурсы есть у кафедры и какие ограничения нужно соблюдать. Но при этом есть важный

недостаток. Классическая линейная модель может получить дробное решение. В результате один и тот же учебный блок может оказаться разделенным между несколькими исполнителями. Формально такое решение может быть допустимо по часам, но для учебного процесса оно не всегда подходит.

Поэтому линейное программирование целесообразно использовать как основу для описания ограничений, но для рассматриваемой задачи его недостаточно. Оно показывает общую структуру распределения, однако не решает вопрос неделимости отдельных видов учебной работы.

Многокритериальная оптимизация

Многокритериальная оптимизация применяется в ситуациях, когда качество решения нельзя оценить по одному показателю. В реальных задачах управления именно так чаще всего и происходит. Например, при распределении учебных часов важно не только закрыть все часы, но и учитывать уровень подготовки сотрудника кафедры, равномерность распределения часов и соответствие специалиста виду учебной работы.

Смысл многокритериального подхода состоит в том, что несколько показателей объединяются в одну оценку или рассматриваются совместно. Для этого показатели приводятся к сопоставимому виду, после чего каждому из них задается вес. Вес показывает, насколько данный критерий важен при выборе решения. Такой подход позволяет сравнивать разные допустимые варианты между собой, а не выбирать решение только по одному параметру.

Для задачи распределения нагрузки многокритериальная оптимизация полезна тем, что она ближе к реальной логике принятия решения. Один сотрудник кафедры может лучше знать дисциплину, но уже иметь большой объем часов. Другой сотрудник кафедры может иметь свободные часы, но подходить к дисциплине немного хуже. В такой ситуации нельзя сказать, что существует единственный очевидный критерий, поэтому нужно учитывать несколько сторон задачи одновременно.

При этом важно разделять критерии качества и обязательные ограничения. Например, допустимость назначения на экзамен или зачет не должна

оцениваться небольшим весом в целевой функции. Если сотрудник кафедры не имеет права принимать экзамен, то такое назначение должно быть запрещено полностью. Следовательно, допустимость является ограничением, а не мягким критерием.

Целочисленное программирование

Целочисленное программирование применяется тогда, когда переменные модели должны принимать целые значения. Для задач назначения особенно часто используются бинарные переменные. Такая переменная принимает значение 1, если назначение выполнено, и значение 0, если назначение не выполнено.

В рассматриваемом примере бинарная переменная может показывать, назначен ли конкретный сотрудник кафедры на определенный вид учебной работы по дисциплине. Если переменная равна 1, то он ведет этот блок полностью. Если переменная равна 0, то он не назначается на данный блок. За счет этого модель не делит один блок на части.

Именно это свойство делает целочисленное программирование важным для задачи распределения учебных часов. В рамках года сотрудник кафедры обычно ведет определенный вид учебной работы по дисциплине целиком. Например, если ему назначены практические занятия по предмету, то логично закрепить за ним весь соответствующий блок, а не отдельные часы. То же самое относится к лекциям, зачетам и экзаменам.

Целочисленная модель также позволяет задавать дополнительные правила. Можно ограничить максимальную годовую объем часов, запретить назначение экзаменов сотрудникам кафедры без соответствующего права, а также потребовать, чтобы каждый учебный блок был назначен только одному преподавателю. Недостаток метода состоит в том, что при большом количестве дисциплин и сотрудников кафедры расчет может стать более сложным, но для задач кафедрального уровня этот подход остается достаточно применимым.

Промежуточный вывод по выбору модели

Рассмотренные методы показывают, что для распределения учебной нагрузки одного подхода недостаточно. Линейное программирование удобно для записи ограничений и работы с часами, но не гарантирует целостность учебных блоков. Многокритериальная оптимизация позволяет учитывать несколько показателей качества, но сама по себе не задает бинарный характер назначений. Целочисленное программирование, наоборот, хорошо описывает сам факт назначения и не допускает дробления блоков, но для выбора лучшего варианта его целесообразно дополнить критериями качества.

В связи с этим для рассматриваемой задачи наиболее подходящим является использование многокритериальной целочисленной модели, которая по форме может быть представлена как смешанно-целочисленная линейная задача. В такой постановке линейные ограничения описывают объем часов и допустимость назначений, бинарные переменные сохраняют целостность учебных блоков, а многокритериальная целевая функция позволяет учитывать качество распределения. В такой модели назначения задаются бинарными переменными, а качество решения оценивается по нескольким критериям. Далее расчет выполняется именно для этого итогового подхода.

Расчет по многокритериальной целочисленной модели

Рассмотрим условный пример распределения годовой учебных часов между четырьмя сотрудниками кафедры. В примере используется пять дисциплин и четыре вида учебной работы: лекции, практические занятия, зачеты и экзамены. Максимальная годовой объем часов на одного сотрудника кафедры принимается равной 790 часам.

Для оценки соответствия сотрудника кафедры дисциплине вводится показатель знания. Он принимает значения от 0 до 1. Значение, близкое к 1, означает, что специалист хорошо подходит для ведения дисциплины. Значение, близкое к 0, означает слабое соответствие.

Таблица 1 – Исходные учебные блоки для распределения

Дисциплина	Лекции	Практики	Зачеты	Экзамены	Итоги
Алгоритмы и программирование	108	180	8	12	308

Базы данных	90	162	8	12	272
Информационные системы	72	144	8	12	236
Информационные технологии управления	72	126	8	12	218
Методы оптимизации	90	144	8	12	254
Итого	432	756	40	60	1288

Таблица 2 – Допустимость назначения преподавателей по видам нагрузки

Преподаватель	Лекции	Практики	Зачеты	Экзамены
Преподаватель 1	да	да	да	да
Преподаватель 2	да	да	да	да
Преподаватель 3	да	да	нет	нет
Преподаватель 4	да	да	нет	нет

Таблица 3 – Показатель знания дисциплины преподавателем

Дисциплина	Преподаватель 1	Преподаватель 2	Преподаватель 3	Преподаватель 4
Алгоритмы и программирование	0,95	0,76	0,90	0,68
Базы данных	0,82	0,94	0,72	0,80
Информационные системы	0,78	0,86	0,84	0,74
Информационные технологии управления	0,74	0,78	0,70	0,92
Методы оптимизации	0,88	0,80	0,76	0,82

Для формализации задачи введем следующие обозначения.

Таблица 4 – Основные обозначения модели

Обозначение	Содержание
i	номер преподавателя, $i = 1, \dots, n$
j	номер дисциплины, $j = 1, \dots, m$
t	вид нагрузки, $t = 1, \dots, r$
n	количество преподавателей
m	количество дисциплин
r	количество видов нагрузки
h_{jt}	количество часов по дисциплине j и виду нагрузки t
k_{ij}	показатель знания преподавателем i дисциплины j
x_{ijt}	бинарная переменная назначения
H_i	годовая нагрузка преподавателя i
H_{Σ}	общий объем распределяемой нагрузки
H_{cp}	средняя нагрузка на одного преподавателя
a_{it}	признак допустимости назначения преподавателя i на вид нагрузки t
α, β	весовые коэффициенты критериев

Основная переменная модели является бинарной:

$$x_{ijt} \in \{0; 1\}$$

Если $x_{ijt} = 1$, то сотрудник кафедры i назначается на вид учебной работы t по дисциплине j . Если $x_{ijt} = 0$, такое назначение не выполняется. Интегральную оценку качества допустимого решения можно записать так:

$$F = \alpha K + \beta R \rightarrow \max$$

$$K = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^r k_{ij} h_{jt} x_{ijt}}{H_{\Sigma}}$$

$$R = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{(H_i - H_{\text{cp}})^2}}{2H_{\Sigma} \left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

$$H_i = \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^r h_{jt} x_{ijt}$$

$$H_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n H_i = \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^r h_{jt}$$

$$H_{\text{cp}} = \frac{H_{\Sigma}}{n}$$

где K – нормированный показатель соответствия сотрудников кафедры дисциплинам, R – показатель равномерности распределения часов, α и β – весовые коэффициенты критериев. В данном примере используются веса $\alpha = 0,65$ и $\beta = 0,35$. Допустимость назначения не включается в целевую функцию, потому что это не желательный признак, а обязательное условие. Если назначение недопустимо, оно просто не может попасть в решение.

Для сохранения целостности блоков и выполнения организационных требований используются следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^n x_{ijt} = 1, \quad j = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, r$$

$$x_{ijt} \in \{0; 1\}, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; t = 1, \dots, r$$

$$H_i \leq 790, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ijt} \leq a_{it}, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; t = 1, \dots, r$$

Первое ограничение означает, что каждый учебный блок назначается ровно одному сотруднику кафедры. Второе ограничение рассчитывает итоговый объем часов сотрудника кафедры и не допускает превышения годового предела.

Третье ограничение запрещает назначать сотрудника кафедры на тот вид учебной работы, который он не может выполнять.

С учетом указанных исходных данных был сформирован один из допустимых вариантов распределения учебных часов. Данный вариант сформирован в таблице 5.

Таблица 5 – Итоговое распределение учебных блоков

Дисциплина	Лекции	Практики	Зачеты	Экзамены
Алгоритмы и программирование	Преподаватель 3	Преподаватель 1	Преподаватель 1	Преподаватель 1
Базы данных	Преподаватель 2	Преподаватель 2	Преподаватель 2	Преподаватель 2
Информационные системы	Преподаватель 3	Преподаватель 3	Преподаватель 2	Преподаватель 2
Информационные технологии управления	Преподаватель 4	Преподаватель 4	Преподаватель 2	Преподаватель 2
Методы оптимизации	Преподаватель 4	Преподаватель 1	Преподаватель 1	Преподаватель 1

Таблица 6 – Расчет нагрузки по преподавателям

Преподаватель	Назначенные часы	Отклонение от средней нагрузки	Проверка ограничения 790 часов
Преподаватель 1	364	42	выполняется
Преподаватель 2	312	10	выполняется
Преподаватель 3	324	2	выполняется
Преподаватель 4	288	34	выполняется
Итого	1288	88	-

Средний объем часов равен $1288 / 4 = 322$ часа. У всех сотрудников кафедры количество часов меньше 790, следовательно, ограничение по максимальному объему часов выполняется. При этом учебные блоки не делятся на части, так как каждый блок в таблице 5 закреплен только за одним исполнителем.

Таблица 7 – Расчет интегральной оценки выбранного решения

Показатель	Расчет	Значение
K	$1157,4 / 1288$	0,899
R	$1 - 88 / (2 \cdot 1288 \cdot (1 - 1 / 4))$	0,954
F	$0,65 \cdot 0,899 + 0,35 \cdot 0,954$	0,918

Полученное значение интегральной оценки $F = 0,918$ показывает, что выбранное решение одновременно учитывает соответствие сотрудников

кафедры дисциплинам и относительную равномерность распределения часов. Зачеты и экзамены назначены только сотрудникам кафедры 1 и 2, что соответствует заданным ограничениям. Поэтому итоговая модель не сводится к ручному подбору, а задает понятные правила выбора распределения.

Заключение

В статье были рассмотрены три метода оптимизации: линейное программирование, многокритериальная оптимизация и целочисленное программирование. Каждый из них может использоваться при решении задач распределения ресурсов, но для выбранной ситуации их возможности отличаются.

Линейное программирование удобно для описания часов и ограничений, однако оно может приводить к дроблению учебных блоков. Многокритериальная оптимизация позволяет учитывать несколько показателей качества решения, но без целочисленных переменных не гарантирует неделимость назначений. Целочисленное программирование позволяет закреплять учебные блоки целиком и задавать строгие правила допустимости, но для выбора более качественного варианта его необходимо дополнить системой критериев.

На основании проведенного анализа можно сделать вывод, что для распределения учебных часов наиболее подходящим является многокритериальная целочисленная модель. Она позволяет назначать учебные блоки целиком, учитывать уровень знания дисциплины сотрудником кафедры, соблюдать ограничения по видам учебной работы и контролировать общий объем часов. Такой подход выглядит наиболее практичным для выбранной задачи, потому что он объединяет формальные ограничения и оценку качества полученного распределения.

Список литературы

1. Панов, В. А. Математические основы теории систем. Методы оптимизации : учебное пособие / В. А. Панов ; В. А. Панов ; М-во образования и науки

Российской Федерации, Федеральное гос. бюджетное образовательное учреждение высш. проф. образования "Пермский нац. исслед. политехнический ун-т". – Изд. 2-е, перераб. и доп.. – Пермь : Изд-во Пермского нац. исслед. политехнического ун-та, 2011. – 147 с. – ISBN 978-5-398-00679-7. – EDN QJZVGH.

2. Сербулов, Ю. С. Методы решения задач оптимизации. Основные методы теории оптимизации : лабораторный практикум / Ю. С. Сербулов ; Ю. С. Сербулов. – Воронеж : Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, 2016. – 96 с. – ISBN 978-5-7994-0747-6. – EDN WGSVBL.

3. Оптимизация распределения учебной нагрузки на кафедре вуза / С. А. Броннов, В. В. Калитина, Т. А. Бородина [и др.] // Цифровые технологии и математическое моделирование в науке, образовании и производстве : материалы Всероссийской научно-практической конференции для преподавателей и научных сотрудников, Иркутск, 26–27 сентября 2024 года. – Иркутск: Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского, 2024. – С. 19-25. – EDN КЕСАНС.

4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022685258 Российская Федерация. Оптимизация компонентного состава : № 2022685035 : заявл. 15.12.2022 : опубли. 22.12.2022 / Т. П. Барановская, А. Е. Вострокнутов, Е. А. Иванова, Д. А. Набока ; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина». – EDN СРМІТЕ.

5. Газизова, Д. Б. Использование методов многокритериальной оптимизации и симплексного метода в технологии подбора оптимальной концентрации модификаторов для битумного вяжущего / Д. Б. Газизова, Е. А. Емельянычева // Интернаука. – 2022. – № 13-3(236). – С. 5-9. – DOI 10.32743/26870142.2022.13.236.336389. – EDN DIWGSK.