

УДК 519.87

Шорников Юрий Владимирович, доктор технических наук, профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск
Пирогов Леонид Игоревич, магистрант, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГС «ХИЩНИК-ЖЕРТВА»

Аннотация

Статья посвящена компьютерному моделированию гибридных систем «хищник-жертва», учитывающих скачкообразные переходы между режимами функционирования экосистем при достижении критических значений численностей популяций. Рассмотрены математические модели с переключениями, включающие режимы убежища для жертвы, миграцию между пространственно разделёнными участками ареала и внутривидовую конкуренцию при высоких плотностях. Проанализированы методы регуляризации скользящих режимов на поверхностях переключения и исследование устойчивости периодических орбит через точечные отображения Пуанкаре. Численное моделирование выявляет области мультистабильности, квазипериодической и хаотической динамики в фазовом пространстве. Обсуждается практическое применение разработанных моделей в задачах оптимального управления биоресурсами, включая регулирование промысла, защиту растений от вредителей и контроль инвазивных видов с учётом экономических и экологических ограничений.

Ключевые слова: гибридные динамические системы, модель хищник-жертва, компьютерное моделирование популяций, режим убежища, скользящие режимы, регуляризация переключений, отображение Пуанкаре, оптимальное управление биоресурсами, мультистабильность экосистем.

Abstract

This article explores computer modeling of hybrid predator-prey systems, accounting for abrupt transitions between ecosystem functioning modes upon reaching critical population levels. Mathematical models with switching modes are considered, including refuge modes for prey, migration between spatially separated habitat areas, and intraspecific competition at high densities. Methods for regularizing sliding modes on switching surfaces and studying the stability of periodic orbits using Poincaré point maps are analyzed. Numerical modeling reveals regions of multistability, quasi-periodic, and chaotic dynamics in phase space. The practical application of the developed models to optimal bioresource management problems is discussed, including fishery regulation, plant protection from pests, and invasive species control, taking into account economic and environmental constraints.

Keywords: hybrid dynamic systems, predator-prey model, computer modeling of populations, refuge regime, sliding modes, switching regularization, Poincaré map, optimal management of bioresources, ecosystem multistability.

Экологи давно столкнулись с парадоксом. Классические уравнения Лотки-Вольтерры предсказывали плавные циклы численности, но полевые учёты зайцев-беляков и рысей в северной тайге фиксировали резкие обвалы популяций при достижении определённых пороговых плотностей, после чего характер взаимодействий между видами качественно менялся [2]. Почему математический аппарат непрерывных дифференциальных уравнений не улавливал этих скачков?

Ответ нашли специалисты по гибридным системам. Они ввели в модели переключения между различными режимами функционирования экосистем, активирующиеся при пересечении критических значений численностей или внешних факторов среды. Такой подход учитывает, что при низкой плотности жертвы хищники переключаются на альтернативные кормовые объекты (полёвок вместо зайцев), а при высокой — начинается каннибализм или территориальная агрессия внутри вида жертвы. Математики формализуют эти переходы через введение нескольких векторных полей в фазовом пространстве с правилами переключения между ними.

А. В. Аргучинцев и И. М. Добринец наблюдали странный феномен [1]. При высоком прессе хищничества часть особей жертвы (например, молодь рыб) уходила в заросли макрофитов, недоступные для крупных хищников. Численность жертвы падала ниже определённого порога $x_{убеж}$, после чего хищничество прекращалось, но популяция продолжала существовать за счёт укрытых особей. Как формализовать такое поведение?

А. Н. Кириллов и А. М. Сазонов построили модель с переключениями [3]:

$$dx/dt = rx(1 - x/K) - \alpha xy/(1 + \beta x), \text{ при } x > x_{убеж}$$

$$dx/dt = rx(1 - x/K), \text{ при } x \leq x_{убеж}$$

$$dy/dt = -my + \gamma \alpha xy/(1 + \beta x)$$

где x обозначает численность жертвы, y — хищников. Прирост жертвы описывается через r , ёмкость среды K исследователи оценивают по данным

многолетних учётов в конкретных водоёмах. Интенсивность нападения α и насыщение трофической функции β взяты из экспериментов 1990-х годов по питанию щуки. Смертность хищника задаётся коэффициентом m , эффективность конверсии биомассы жертвы в биомассу хищника — параметром γ . Пороговое значение $x_{\text{убеж}}$ активирует режим убежища, при котором хищничество исчезает из правой части первого уравнения.

Проблема возникла неожиданно. При численном интегрировании траектория системы «застревала» на границе переключения $x = x_{\text{убеж}}$ и двигалась вдоль неё, что математики называют скользящим режимом. Классические методы численного интегрирования (Рунге-Кутты четвёртого порядка) давали осциллирующие решения или расходились.

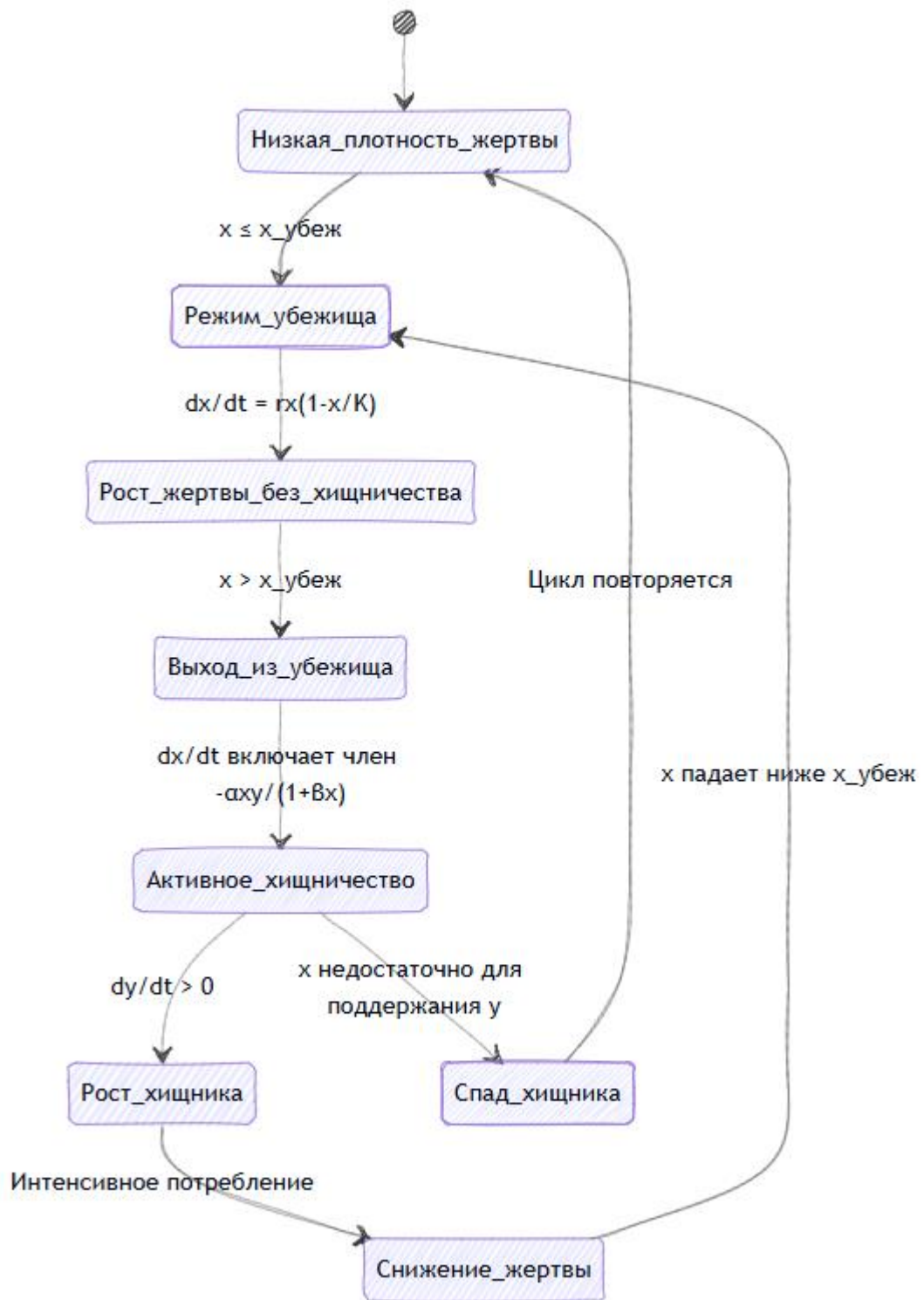


Рисунок 1 – Карта состояний ГС модели «хищник-жертва»

А. Ю. Переварюха построил гибридные модели, учитывающие дискретные переходы между возрастными когортами и непрерывную динамику численности внутри каждой стадии [4, 5]:

$$dN_{\text{я}}/dt = \lambda F(N_{\text{в}})N_{\text{в}} - \mu_{\text{я}}N_{\text{я}} - \sigma_{\text{я}}N_{\text{я}}$$

$$dN_{\text{л}}/dt = \sigma_{\text{я}}N_{\text{я}} - \mu_{\text{л}}(N_{\text{л}})N_{\text{л}} - \sigma_{\text{л}}N_{\text{л}}$$

$$dN_{\text{к}}/dt = \sigma_{\text{л}}N_{\text{л}} - \mu_{\text{к}}N_{\text{к}} - \sigma_{\text{к}}N_{\text{к}}$$

$$dN_{\text{в}}/dt = \sigma_{\text{к}}N_{\text{к}} - \mu_{\text{в}}N_{\text{в}}$$

Численности яиц $N_{\text{я}}$, личинок $N_{\text{л}}$, куколок $N_{\text{к}}$ и имаго $N_{\text{в}}$ связаны через коэффициенты перехода σ_i между стадиями (температурозависимые, рассчитываются по сумме эффективных температур). Плодовитость самок $\lambda = 200-500$ яиц для непарного шелкопряда. Функция $F(N_{\text{в}}) = 1/(1 + \delta N_{\text{в}})$ описывает эффект плотностно-зависимого снижения плодовитости при высокой численности взрослых особей из-за стресса и нехватки мест откладки яиц. Коэффициенты смертности μ_i на каждой стадии варьируют в зависимости от температуры и влажности, данные взяты из полевых учётов в Самарской области в 2015-2018 гг.

Гибридный характер проявился в переключении зависимости смертности личинок от их плотности в зависимости от фазы вспышки численности [5]:

$$\mu_{\text{л}}(N_{\text{л}}) = \mu_{\text{л}0} = 0.05, \text{ при } N_{\text{л}} < N_{\text{кр}}$$

$$\mu_{\text{л}}(N_{\text{л}}) = \mu_{\text{л}0} + \delta(N_{\text{л}} - N_{\text{кр}})^2 = 0.05 + 0.0001(N_{\text{л}} - 1000)^2, \text{ при } N_{\text{л}} \geq N_{\text{кр}}$$

Первый режим соответствовал фазе нарастания численности при низкой конкуренции за пищевые ресурсы и незначительном влиянии энтомофагов (паразитоидов-наездников). Второй режим описывал фазу пика вспышки, когда резко возрастала смертность от истощения кормовой базы (дубы полностью объедены), каннибализма среди личинок и эпизоотий ядерного полиэдроза (вирусное заболевание). Это приводило к быстрому коллапсу популяции за 2-3 недели.

Компьютерные эксперименты в Самарском университете дали возможность специалистам прогнозировать сроки наступления критических фаз развития вредителя. Оптимизация календарных сроков проведения защитных мероприятий (опрыскивание биопрепаратом на основе *Bacillus thuringiensis*) основывалась на результатах численного моделирования. Эффективность различных стратегий интегрированной защиты растений оценивалась с учётом экологических ограничений (запрет обработок в период цветения медоносов) и требований продовольственной безопасности (период ожидания до уборки урожая).

Химические инсектициды, биологические агенты и агротехнические методы (раннее скашивание травостоя для уничтожения куколок) комбинировались в оптимальных пропорциях. Модели давали возможность исследователям предсказывать последствия различных сценариев управления до их практической реализации в производственных масштабах. Экономические затраты минимизировались при соблюдении экологических норм: численность энтомофагов (божьих коровок, златоглазок) не должна была упасть ниже 20% от фоновой.

Гибридные математические модели системы «хищник-жертва» расширяют арсенал теоретической экологии. Переключения между режимами функционирования отражают реальную сложность природных экосистем. Компьютерное моделирование даёт исследователям инструмент для анализа сложных динамических режимов, недоступных аналитическому исследованию классическими методами теории дифференциальных уравнений.

Список используемых источников

1. Аргучинцев, А. В. Оптимальное управление системами гибридных дифференциальных уравнений и приложения в задачах динамики популяций / А. В. Аргучинцев, И. М. Добринцев // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО'20) : Материалы VII Международной конференции, Улан-Удэ, 07–12 сентября 2020 года. – г.Улан-Удэ: Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 2020. – С. 20-22. – EDN GWWDIM.
2. Кириллов А. Н., Сазонов А. М. Периодические режимы в гибридной динамической системе «хищник–жертва» с учетом миграции и внутривидовой конкуренции // Известия вузов. ПНД. 2025. №2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/periodicheskie-rezhimy-v-gibridnoy-dinamicheskoy-sisteme-hischnik-zhertva-s-uchetom-migratsii-i-vnutrividovoy-konkurentsii> (дата обращения: 13.02.2026).
3. Кириллов А. Н., Сазонов А. М. Модель гибридной динамики популяций с режимом убежища: регуляризация и предельные множества // Сиб. журн. индустр. матем., 27:4 (2024), 34–48
4. Переварюха А. Ю. Моделирование темпов роста чужеродных видов насекомых, дифференцированное по стадиям онтогенеза // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. №2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-tempov-rosta-chuzherodnyh-vidov-nasekomyh-differentsirovannoe-po-stadiyam-ontogeneza> (дата обращения: 13.02.2026).
5. Переварюха, А. Ю. Модель темпов роста для фазы вспышки численности популяции вредителей / А. Ю. Переварюха // Современные проблемы математического моделирования : Сборник трудов XVIII Всероссийской конференции-школы молодых исследователей, пос. Абрау-Дюрсо, 16–21 сентября 2019 года / Ответственные редакторы Г.В. Муратова,

И.Н. Шабас. – пос. Абрау-Дюрсо: Южный федеральный университет, 2019. –
С. 92-99. – EDN QBMXOV.