

**Тюменцев Александр Григорьевич,**

Доцент каф. РФ и ТФ АлтГУ

ГОУ ВПО «Алтайский Государственный Университет»

г. Барнаул

**МОДЕЛИРОВАНИЕ САМООРГАНИЗОВАННОЙ КРИТИЧНОСТИ  
МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО: ВНЕДРЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО  
ЭКСПЕРИМЕНТА В УЧЕБНЫЙ ПРОЦЕСС**

В работе обсуждается использование модели самоорганизованной критичности (СОК) для эффективного освоение численного моделирования процессов методом Монте-Карло. Сложные нелинейные системы во многих практически важных случаях описываются моделью подобного типа. В работе описана реализация численного моделирования системы («куча песка») на основе метода стохастического моделирования. Получены распределения частиц по пробегам и энергии.

In this paper discusses the use of the self-organized criticality (SOC) model for the effective implementation of Monte Carlo numerical simulations. Complex nonlinear systems are described by this type of model in many practically important cases. The paper describes the implementation of numerical simulation of a sandpile system based on the stochastic modeling method. Particle free path and energy distributions are obtained.

**Ключевые слова:** метод Монте-Карло, теория самоорганизованной критичности (СОК), моделирование сложных процессов.

**Keywords:** Monte Carlo method, self-organized criticality theory (SOC), modeling of complex processes.

## **Введение**

Как правило, сложные системы рассматривались по аналогии с простыми, упорядоченными структурами [1]. Это было обусловлено успехом методов, разработанных для последних. Предполагалось, что поведение сложных систем можно предсказать, анализируя их отдельные компоненты и внутренние процессы. Также считалось, что реакция системы пропорциональна внешним воздействиям, а её динамика описывается через равновесные состояния, лишь изредка нарушаемые. Однако, сложность системы означает, что она не сводится к простой сумме своих частей, поэтому принцип суперпозиции к ней неприменим. Отсюда следует, что сложность тесно связана с нелинейностью. Изучение отдельных элементов сложной нелинейной системы не позволит точно предсказать её поведение. Поскольку к таким системам относятся земная кора, фондовый рынок, биосфера, общество, космическая плазма и многие другие иерархические структуры, понимание их моделей критически важно для анализа управляющих воздействий, а также для разработки стратегий защиты и разрушения. Для объяснения поведения сложных систем в 1987 г. была разработана теория самоорганизованной критичности (СОК) [2,3]. Основная идея этой теории заключается в том, что сложные пространственно-распределенные системы под действием внешнего возмущения естественным образом эволюционируют к критическому состоянию. В этом состоянии даже малое событие может вызвать лавину изменений, способных затронуть всю систему. Согласно этой теории, сложные системы никогда не достигают равновесного состояния, а вместо этого переходят из одного метастабильного состояния в другое. Наибольшее внимание при построении этой теории было уделено структурам — состояниям, возникающим в результате согласованного поведения большого числа частиц. В пространственно распределенных системах при наличии диссипации самоорганизация может приводить к потере устойчивости равновесного состояния.

Представляется перспективным использование данной модели также и в задачах астрофизики, в частности при анализе возможных механизмов генерации космических лучей в источниках.

Данная работа посвящена численному моделированию поведения подобных систем с использованием методов Монте-Карло. Отмечу особенно, что решение подобных, актуальных в практических исследованиях, задач может вывести процесс преподавания на качественно новый уровень получения знаний. [1] [SEP]

### Модель системы

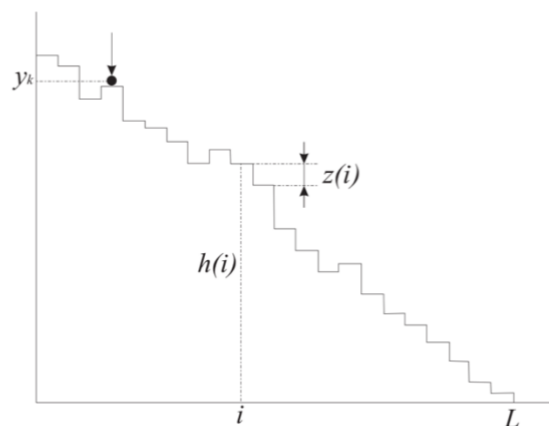


Рис. 1: Параметры модели «куча песка»

Парадигмой теории самоорганизованной критичности является «куча песка». Одномерная модель «кучи песка» [2] представляет собой  $L$  ячеек с соответствующими им высотами  $h(i)$  (рис.1). На поверхность этой «кучи» время от времени добавляются песчинки. Граничные условия таковы, что песчинки могут покинуть «кучу» только с правой стороны. Для описания динамики одномерной «кучи» используются следующие параметры:  $L$  - количество ячеек в «куче»;  $p_0$  - вероятность добавления песчинки в ячейку;  $T$  - количество временных шагов;  $N_f$  - количество песчинок, покидающих ячейку в одном акте осыпания;  $h(i)$  - высота  $i$ -ой ячейки;  $z(i) = h(i) - h(i+1)$  - локальный градиент;  $z_c$  - критическое значение локального градиента. Далее приведены правила функционирования одномерной модели.

- На временном шаге  $t \in [0 : T]$  с вероятностью  $0 \leq p \leq 1$  добавляем песчинку в  $i$ -ую ячейку, исходя из условия: если  $p \geq 1 - p_0$ , то

$h(i) \rightarrow h(i) + 1$ , иначе высота ячейки остается неизменной. После падения частицы в  $i$ -ую ячейку «кучи», «помечаем» песчинку (присваиваем ей номер  $k$ ), запоминаем стартовое положение песчинки  $x_k$  (номер ячейки, в которую она упала).

- Далее выполняем проверку ячеек на стабильность. Если  $z(i) \geq z_c$ , то ячейка объявляется нестабильной и осыпается:  $\overset{\{\{\}}{\text{SEP}}}{h(i)} \rightarrow h(i) - N_f, \overset{\{\{\}}{\text{SEP}}}{h(i+1)} \rightarrow h(i+1) + N_f$ .

На следующем этапе начинаем следить за движением «меченой» песчинки. Вводим дополнительную координату  $y_k$  (начальное значение  $y_k=0$ ), обозначающую глубину залегания  $k$ -ой частицы относительно верха  $i$ -ой ячейки. Далее положение  $k$ -ой песчинки изменяется следующим образом:

- Если в ячейку, где находится «меченная» частица, в результате розыгрыша вероятности  $p$  попадает новая песчинка, то происходит засыпание, т. е.  $y_k = y_k + 1$
- Если ячейка, в которой находится  $k$ -ая «меченая» частица, нестабильная, т. е.  $z(i) \geq z_c$ , то возможны варианты:
  1. Если  $y_k > N_f - 1$ , то, в результате однократного акта осыпания ячейки, «меченая» песчинка останется в этой ячейке, т. к. происходит сброс меньшего числа песчинок, чем глубина ее залегания.
  2. Если  $y_k < N_f$ , то  $x_k = x_k + 1$  происходит сброс песчинки на следующую ячейку.
  3. Если в результате предыдущих шагов  $N_f$  частиц сбрасываются в ячейку где уже есть «меченые» песчинки, то происходит их засыпание  $\overset{\{\{\}}{\text{SEP}}}{y_k} = y_k + N_f$ .
- Если  $z(i) < z_c$ , т. е. ячейка стабильная и в ней находится  $k$ -ая «меченая» частица, то, также как и «засыпанные» песчинки, считаем, что она попала в «ловушку».
- Если песчинка падает с «кучи», т. е.  $x_k > L$ , то возвращаем ее в стартовое положение.

## Результаты моделирования

Моделирование осуществлялось при следующих значениях параметров: число осыпающихся в одном акте частиц  $N_f = 3$ ; величина критического градиента  $z_c = 10$ ; общее время «работы кучи»  $T = 10^7$  для моделей «куч песка»

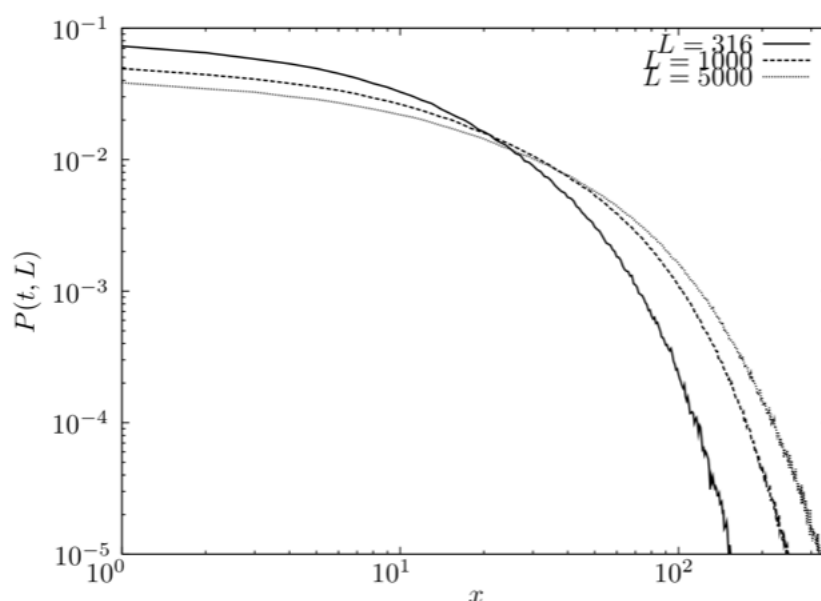


Рис. 2: Плотность распределения непрерывных пробегов песчинок для различных длин «кучи».  $p_0 = 10^{-3}$

с длиной  $L = 316, 1000, 5000$ ; вероятность падения песчинок на «кучу»  $p_0 = 0.01, 0.001$  и  $0.0001$ . Чтобы уменьшить влияние конечности системы, наблюдение производим только за теми частицами, которые падают на верхнюю половину «кучи». При исследовании динамики «кучи песка» особое внимание уделяется распределению непрерывных пробегов песчинок до остановки. После остановки или, как мы договорились выше попадания в «ловушку», будем фиксировать время пребывания в этом состоянии. После выхода из «ловушки» история для данной песчинки начинается заново.

В рамках данной задачи исследование распределения непрерывных пробегов производилось при параметрах модели представленных выше.

Результаты моделирования для различных длин «кучи» и для вероятности падения  $p_0 = 0.001$  представлены на рис.1.

Как было показано в [4] класс распределений, подобных полученному нами, обладает свойством скейлинга. Функция  $P(t, L)$  может быть представлена в виде

$$P(t, L) = L^{-\alpha} g(t \cdot L^{-\alpha}) \quad (1).$$

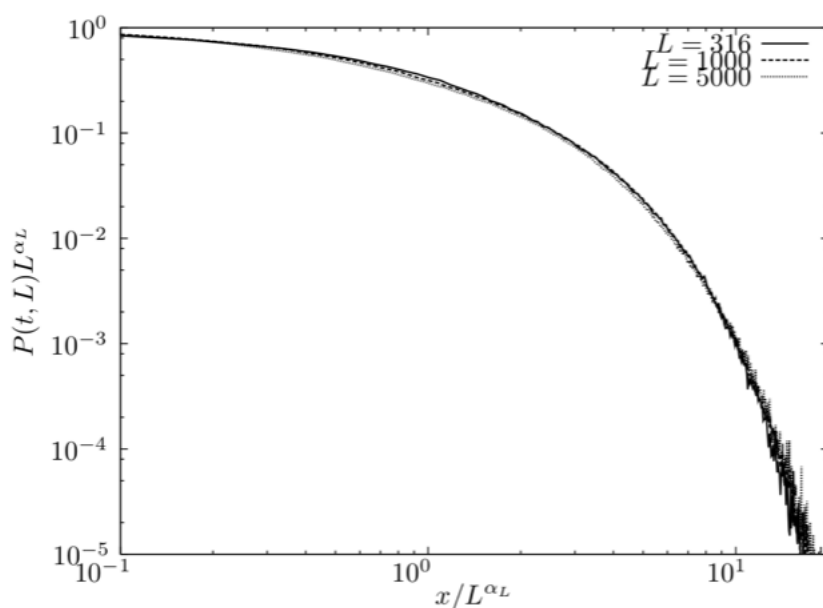


Рис. 3: Скейлинг плотности распределения  $P(t, L)$  для различных длин «кучи» при  $\alpha_L \approx 0.42$

Используя последнее равенство (1), мы перемасштабировали распределение представленное на рис.2. Анализ результатов расчетов показал, что скейлинговое поведение распределения  $P(t, L)$  достигается при  $\alpha \approx 0.42$  (см. рис.3).

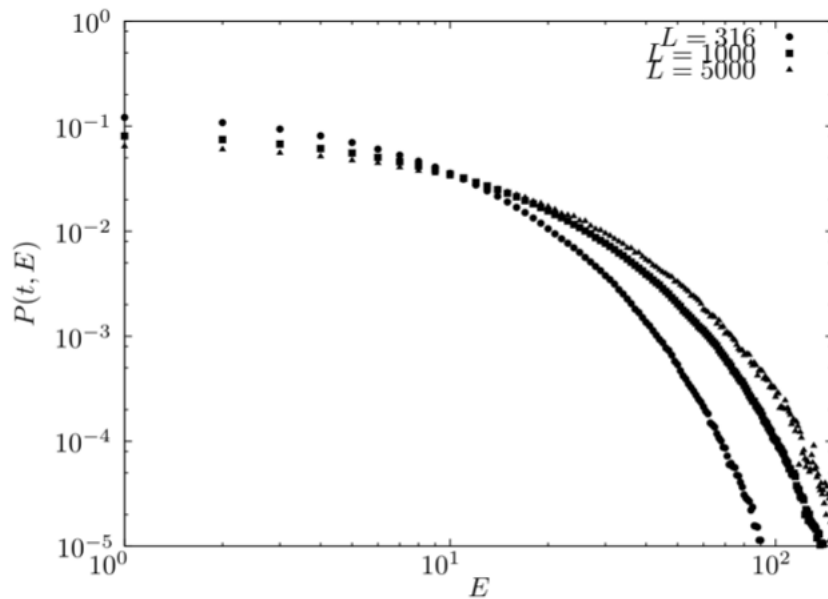


Рис. 4: Плотность распределения энергии песчинок для различных длин «кучи».  $p_0 = 10^{-3}$

На следующем шаге моделирования мы изменили представленную модель «кучи песка», добавив энергетическую переменную. Частицы попадают в систему с начальной энергией  $E_0$ . При каждом акте осыпания, «меченая» частица получает случайную добавку энергии  $E'$ . После попадания в «ловушку» мы фиксируем величину энергии, приобретенной за время движения. Результирующее распределение энергии частиц представлено на рис.4 и рис.5.

## Заключение

В данной работе было выполнено численное моделирование поведения систем, обладающих свойствами самоорганизующихся критических (СОК) систем, с применением методов Монте-Карло. В результате расчетов были получены распределения частиц по пробегам, а также выявлена скейлинговая зависимость плотности распределения. В классическую модель «кучи песка» был добавлен параметр, соответствующий энергии частиц. По итогам расчетов были получены распределения энергии элементов системы.

Полученные, во вполне доступной при освоении метода модели результаты, можно использовать в частности в задачах современной астрофизики для описания механизмов генерации космических лучей в Галактике, что значительно увеличивает практическую наглядность и эффективность освоения.

### **Библиографический список**

1. Бак П., Чен К. Самоорганизованная критичность // В мире науки. 1991. No 3. с. 16–24.
  2. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of 1/f-noise // Phys. Rev. Lett. 1987. v.59. Pp. 381–384.
  3. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality // Phys. Rev. A. 1988. v.38. Pp. 364–374.
- B. A. Carreras, V. E. Lynch, D. E. Newman, G. M. Zaslavsky Anomalous diffusion in a running sandpile model// Phys. Rev. E. 1999. v.60, No 4. Pp. 4770–4778.