

УДК 27.21.00

Махова Наталья Борисовна, к.т.н., доцент кафедры “Высшая математика,
Российский университет транспорта, Россия, г. Москва

Омеляненко Алексей Максимович, студент, Российский университет
транспорта, Россия, г. Москва

Солженицина Софья Константиновна, студент, Российский университет
транспорта, Россия, г. Москва

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ В РАБОТЕ ИНЖЕНЕРА

Аннотация

В статье рассматривается применение знаний, полученных в курсе изучения аналитической геометрии для решения задач строительной механики, показан переход от плоских расчетных схем к трехмерному моделированию. Актуальность исследования обуславливается необходимостью подготовки инженеров-транспортников по специальности «Промышленное и гражданское строительство» к работе в условиях цифровизации строительной отрасли, где 3D –моделирование требует точного геометрического описания конструкций. На примере статически определимой консольной балки с жесткой заделкой демонстрируется применение координатного метода, аналитического построения эпюр внутренних усилий и создания трехмерной модели балки. Проведено сравнение результатов плоского и пространственного расчетов, показавшее высокую сходимость результатов. Обоснована необходимость владения знаниями в области аналитической геометрией и строительной механикой при подготовке инженеров по специальности «Промышленное и гражданское строительство».

Annotation

The article discusses the application of the knowledge gained in the course of studying analytical geometry to solve problems in structural mechanics, and shows

the transition from flat calculation schemes to three-dimensional modeling. The relevance of the study is due to the need to prepare transport engineers specializing in industrial and civil construction to work in the digitalized construction industry, where 3D modeling requires precise geometric descriptions of structures. The article uses the example of a statically determinate cantilever beam with a rigid support to demonstrate the application of the coordinate method, the analytical construction of internal force diagrams, and the creation of a three-dimensional model of the beam. The results of flat and spatial calculations were compared, showing high convergence of the results. The necessity of possessing knowledge in the field of analytical geometry and structural mechanics in training engineers in the specialty "Industrial and civil construction" is substantiated.

Ключевые слова: промышленное и гражданское строительство, аналитическая геометрия, строительная механика, 3D-моделирование, балка, эпюры, расчетная схема, координатный метод.

Keywords: industrial and civil engineering, analytical geometry, structural mechanics, 3D modeling, beam, diagrams, design scheme, coordinate method.

Строительная механика является одной из фундаментальных дисциплин при обучении и подготовке инженеров по специальности «Промышленное и гражданское строительство». Она изучает методы расчёта сооружений на прочность, жёсткость и устойчивость под действием различных внешних нагрузок. В основе этих методов лежит математика, а точнее аналитическая геометрия. Именно она позволяет перейти от схематического представления к натуральной форме конструкции, задать геометрию элементов в координатной форме, описать линии действия нагрузок и деформированное состояние конструкции. [4, с. 448]

Сегодня же строительство характеризуется сложными пространственными конструкциями: мосты, тоннели, путепроводы, эстакады и другие. Создать полное описание таких конструкций в двумерной модели нельзя, поэтому обращение к трехмерному моделированию просто неизбежно.

Но переход от плоских расчётных схем к пространственным моделям невозможен без глубокого понимания аналитической геометрии. Именно аналитическая геометрия позволяет сделать этот переход, задать геометрию элементов в координатной форме, описать линии действия нагрузок и деформированное состояние.

Более того, сегодня активно развиваются и BIM-технологии (Building Information Model). Они позволяют создать полную виртуальную модель необходимого здания и сооружения, поэтому владение знаниями в области аналитической геометрии становится необходимостью для будущего инженера-строителя.

Любая расчетная схема в строительной механике начинается с геометрического описания: задаются координаты узлов, направления стержней, типы опор. [2, с. 656] Аналитическая геометрия представляет эти данные на своем языке.

Для плоской консольной балки (рис.1) достаточно задать:

1. Координаты начала и конца балки в декартовой системе ХОУ
2. Уравнение прямой, вдоль которой проходит ось балки
3. Координаты точек приложения сосредоточенных сил
4. Границы участков с распределенной нагрузкой

Для трехмерной модели (рис.2) к этому добавляется третья координата z , а ось балки описывается прямой в пространстве: $r(t)=r_0+t\cdot s$

где $t\in[0, L]$, r_0 — радиус-вектор начала, s — направляющий вектор, L — длина балки.

Такое описание балки позволяет автоматически вычислить длину элемента, углы поворота и наклона, направляющие косинусы, что необходимо для перехода от локальной системы координат стержня к глобальной.

Основные уравнения строительной механики (уравнение равновесия, физические уравнения, уравнения совместности деформации) в матричной форме имеют вид: $K * U = F$

где K – матрица жесткости, U – вектор узловых перемещений, F – вектор узловых нагрузок.

Формирование матрицы жесткости для пространственного стержня невозможно без тригонометрических функций, которые задают ориентацию элемента в пространстве. Эти функции мы получим из направляющих косинусов, которые, в свою очередь, вычисляются через координаты узлов:

$$\cos\alpha_x = \frac{x_j - x_i}{L}; \cos\alpha_y = \frac{y_j - y_i}{L}; \cos\alpha_z = \frac{z_j - z_i}{L}$$

При переходе от плоской расчётной схемы к трёхмерной возникает необходимость в согласовании нескольких систем координат:

- глобальная - система координат сооружения;
- локальные - системы координат каждого стержня

Преобразование координат и усилий между этими системами выполняется с помощью матриц поворота, построенных на основе направляющих косинусов. Это прямое и наглядное применение аналитической геометрии, которое должен освоить каждый современный инженер-строитель. [3, с. 224]

Рассмотрим слияние двух дисциплин на конкретном примере:

Статически определимая консольная балка длиной $L=4$ м (рис. 1). Левый конец балки жёстко закреплён в опоре А (заделка), правый конец В — свободен (такая расчётная схема широко встречается в промышленном и гражданском строительстве: кронштейны, карнизы, кран-балки, навесные конструкции, элементы рамных каркасов). По всей длине балки равномерно распределённая нагрузка $q=10$ кН/м; сосредоточенная сила $F=20$ кН на свободном конце балки. Поперечное сечение балки — двутавр №20. Момент инерции $I_x=1840$ см⁴, момент сопротивления $W_x=184$ см³. Материал — сталь, причем модуль упругости $E=2.1 \cdot 10^5$ МПа. [5, с. 287]

Требуется:

1. Определить опорные реакции в заделке
2. Записать аналитические выражения для поперечной силы $Q(x)$ и изгибающего момента $M(x)$

3. Построить эпюры Q и M
4. Вычислить максимальные напряжения и величину прогиба
5. Создать трехмерную модель балки и сравнить результаты

Решение:

Примем начало координат в точке заделки A, ось x направим вдоль оси балки вправо (к свободному концу), ось y — вертикально вверх.

В жёсткой заделке возникают три опорные реакции: горизонтальная сила R_{Ax} ; вертикальная сила R_{Ay} ; изгибающий момент M_A

Горизонтальных нагрузок нет, поэтому $R_{Ax}=0$.

Составим уравнения равновесия:

1. Сумма проекций всех сил на вертикальную ось y:

$$\sum F_y = 0: R_{Ay} - q \cdot L - F = 0$$

$$R_{Ay} = q \cdot L + F = 10 \cdot 4 + 20 = 40 + 20 = 60 \text{ кН}$$

2. Сумма моментов всех сил относительно точки A:

$$\sum M_A = 0: -M_A + q \cdot L \cdot L/2 + F \cdot L = 0$$

$$M_A = q \cdot L \cdot L/2 + F \cdot L = 10 \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot 4 = 80 + 80 = 160 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Таким образом, реакции в заделке: $R_{Ay} = 60 \text{ кН}$ (направлена вверх), $M_A = 160 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (направлен против часовой стрелки)

Для произвольного сечения на расстоянии x от заделки ($0 \leq x \leq L$) рассмотрим левую отсечённую часть балки. Поперечная сила $Q(x)$ равна сумме проекций всех сил, действующих на левую часть, на вертикальную ось:

$$Q(x) = R_{Ay} - q \cdot x = 60 - 10 \cdot x; x \in [0, 4]$$

Изгибающий момент $M(x)$ равен сумме моментов всех сил, действующих на левую часть, относительно рассматриваемого сечения:

$$M(x) = -M_A + R_{Ay} \cdot x - q \cdot x \cdot x/2 = -160 + 60 \cdot x - 10 \cdot x^2/2 = -160 + 60 \cdot x - 5 \cdot x^2; x \in [0, 4]$$

Полученные функции являются кусочно-непрерывными и полностью описывают изменение внутренних усилий по длине балки.

Для построения эпюр вычислим значения $Q(x)$ и $M(x)$ в характерных точках:

x (м)	Q(x) = 60-10*x (кН)	M(x)=-160+60*x-5x ² (кН*м)
0	60	-160
1	50	-105
2	40	-60
3	30	-25
4	20	0

Таблица 1. Значения для эюр Q(x) и M(x) в характерных точках.

Эюра Q(x) представляет собой прямую линию, а эюра M(x) – квадратичную параболу.

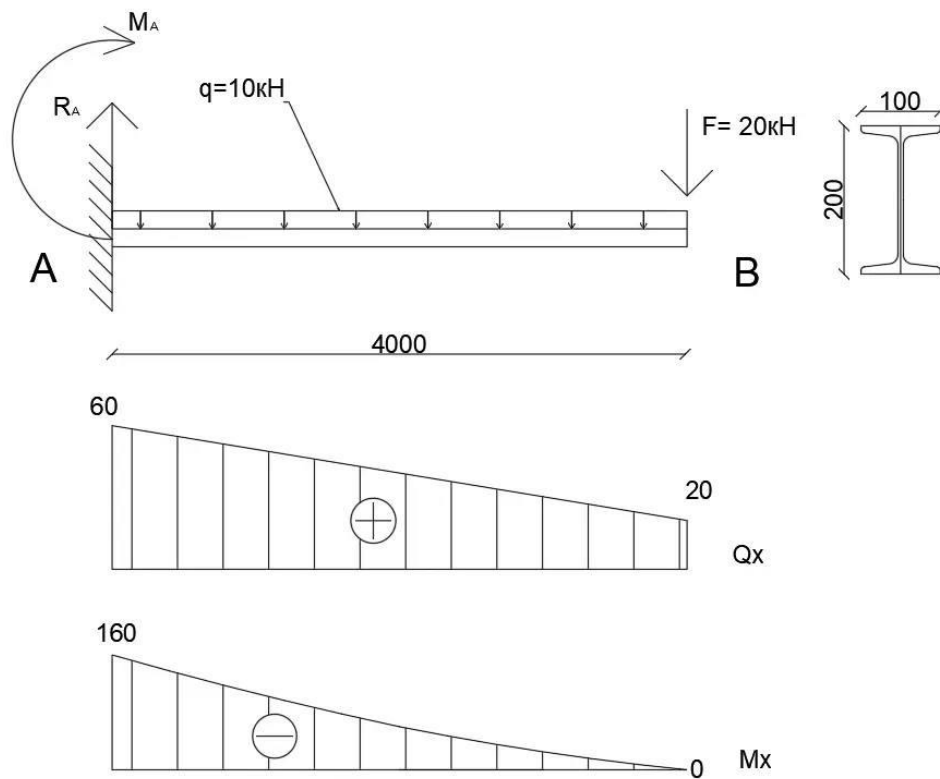


Рис.1. Схема балки и эюры Q и M.

Максимальное нормальное напряжение в опасном сечении (заделке) определяются по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} = \frac{160 * 10^3 \text{ Н} * \text{м}}{184 * 10^{-6} \text{ Н} * \text{м}} = 869,6 * 10^6 \text{ Па} = 869,6 \text{ МПа}$$

Полученное значение превышает предел текучести стали ($\sigma_T \approx 235 - 355 \text{ МПа}$), что указывает на необходимость увеличения сечения балки для реального проектирования.

Максимальный прогиб консольной балки от заданных нагрузок определяется по формуле:

$$f_{\max} = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I} + \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{10 \cdot 4^4}{8 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} + \frac{20 \cdot 4^3}{3 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} \approx$$

0.0966 мм

Полученное значение прогиба очень мало, что характерно для стальных балок. [6, с. 2-9]

Для перехода к трёхмерной модели балки необходимо задать геометрию в пространстве. В отличие от плоской схемы, где балка изображалась линией, в 3D-модели мы работаем с твёрдым телом, имеющим реальное поперечное сечение. [1, с. 360]

Этапы построения модели:

1. Задание узлов в пространстве: узел А (0,0,0); узел В (4,0,0).
2. Создадим ось балки: командой LINE строим отрезок между узлами А и В.
3. Построим поперечное сечение. В локальной плоскости YOZ строим контур двутавра №20 по ГОСТ.
4. Формирования плоской области из замкнутого контура используем команду REGION.
5. Выдавливание сечения вдоль оси балки. Команда EXTRUDE – выбираем область, указываем высоту выдавливания: 4000 мм. Получаем трехмерное тело балки.
6. Назначение материала и визуализация. Через свойства материала (PROPERTIES) выбираем сталь (steel). Включаем режим реалистичного отображения (VIEW => VISUAL STYLES => REALISTIC).
7. Приложим к полученной балке заданные силы из задания.

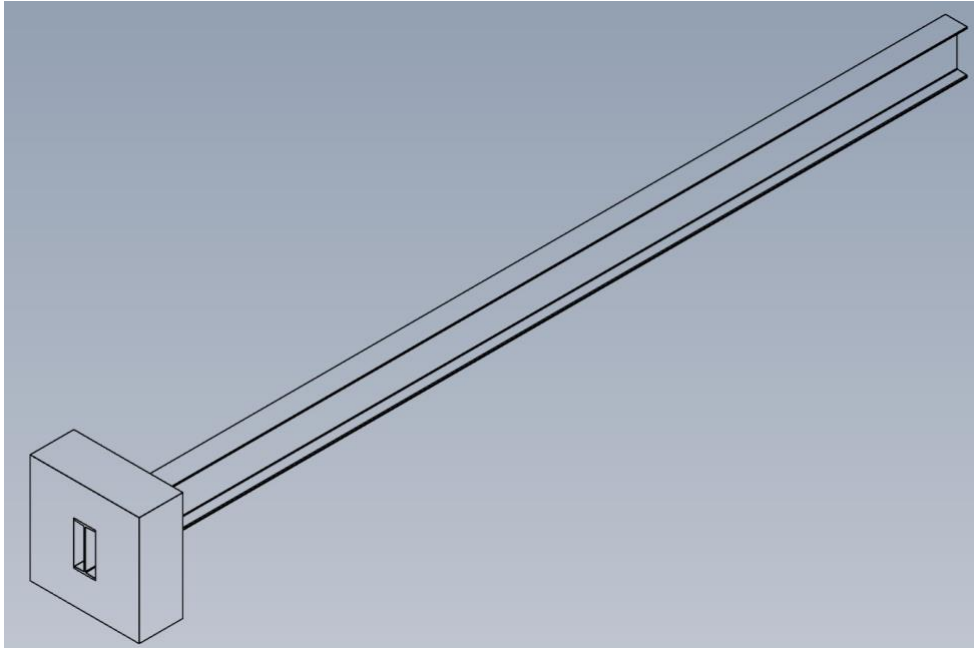


Рис.2. Трехмерная модель балки.

Таким образом максимальный прогиб на 3D –модели составил 0,0982 мм.

Расхождение между плоской и пространственной моделями не превышает 2%, что находится в пределах нормы.

Знание аналитической геометрии и умение применять ее методы в строительной механике является базой для успешного освоения таких профильных дисциплин как сопротивление материалов, металлические конструкции, компьютерное моделирование конструкций, BIM-технологии.

Что касается транспортного строительства, то здесь роль аналитической геометрии несомненно велика. Ведь такие транспортные сооружения как мосты, путепроводы, тоннели характеризуются:

- протяженностью, когда ось сооружения часто является пространственной кривой
- переменным сечением, так как может меняться высота балки по длине и диаметр путепровода или тоннеля по ширине
- сложными узловыми сопряжениями, когда между собой взаимодействуют различные опорные части конструкции и деформационные швы.

Аналитическое описание таких объектов невозможно без кривых, поверхностей, плоскостей и систем координат.

Также в современном мире, в частности в транспортной отрасли, очень развито BIM-моделирование (Building Information Model). Оно позволяет создать полную виртуальную модель необходимого здания и сооружения. В основе BIM-модели лежит аналитическая геометрия, которая использует различные параметрические зависимости, выраженные через координаты и уравнения. Без понимания аналитической геометрии инженер не может корректно задать геометрию модели.

Список литературы

1. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. — М.: Изд-во АСВ, 2020. — 360 с.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: учебник для вузов. — М.: Лань, 2021. — 656 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: учебник. — М.: Физматлит, 2019. — 224 с.
4. Ржаницын А.Р. Строительная механика: учеб. пособие для строит. спец. вузов. — М.: Высш. шк., 2019. — 448 с.
5. Рыбак С.А., Филатов В.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах для строителей: учеб.-практ. пособие. — Ростов н/Д: Феникс, 2021. — 287 с.
6. Сливкер В.И., Перельмутер А.В. Расчётные модели сооружений и возможность их анализа // Строительная механика и расчёт сооружений. — 2019. — № 4. — С. 2–9.

References

1. Gorodetsky A.S., Evzerov I.D. Computer Models of Structures. — Moscow: ASV Publishing House, 2020. — 360 p.
2. Darkov A.V., Shaposhnikov N.N. Structural Mechanics: Textbook for Universities. — Moscow: Lan, 2021. — 656 p.
3. Ilyin V.A., Poznyak E.G. Analytical Geometry: Textbook. — Moscow: Fizmatlit, 2019. — 224 p.

4. Rzhantsyn A.R. Structural Mechanics: Textbook. for construction. special. universities. — Moscow: Vyssh. shk., 2019. — 448 p.
5. Rybak S.A., Filatov V.V. Analytical geometry in examples and tasks for builders: textbook. stipend. — Rostov n/A: Phoenix, 2021. — 287 p.
6. Slivker V.I., Perelmuter A.V. Design models of structures and the possibility of their analysis // Construction mechanics and calculation of structures, 2019, No. 4, pp. 2-9.