УДК 517.95:517.972

Галиев Ильдар Мурзагитович кандидат физико-математических наук, доцент
БУ ВО Ханты-Мансийского автономного округа – Югры «Сургутский государственный университет» Россия, г. Сургут

РАСПРЕДЕЛЁННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ПО ФОРМЕ В СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖИДКОСТИ И УПРУГОГО ТЕЛА

Аннотация: *Исследуется задача чувствительности по форме для стационарной двумерной системы взаимодействия вязкой несжимаемой жидкости и деформируемого тела, описываемой моделью типа Стокса–упругости, в которой геометрическим параметром служит опорная область упругого тела. Цель работы состоит в лагранжевой переформулировке этой задачи и в получении на её основе распределённого представления производной по форме. В качестве теоретической основы используются результаты В. Калисти, И. Лукардези и Ж.-Ф. Шейда по дифференцируемости решения по форме и результаты А. Лорена, П. Т. П. Лопеса и Ж. К. Накасато по абстрактному лагранжеву аппарату вычисления производных по форме [1; 2]. Показано, что производная по форме допускает объёмное тензорное представление, линейное по полю скорости геометрической деформации и его градиенту, и при дополнительной гладкости редуцируется к граничной форме Адамара [1; 2; 6; 7]. Дополнительно обсуждается перенос построенной схемы на задачи взаимодействия жидкости и ледяного тела переменной формы.*

Ключевые слова: *чувствительность по форме; производная по форме; распределённая производная по форме; граничная форма Адамара; взаимодействие жидкости и упругого тела; взаимодействие жидкости и ледяного тела; лагранжев аппарат.*

Abstract: *This paper studies the shape sensitivity problem for a stationary two-dimensional fluid–structure interaction system involving a viscous incompressible fluid and a deformable body, described by a Stokes–elasticity type model in which the reference domain of the elastic body serves as the geometric parameter. The aim of the work is to provide a Lagrangian reformulation of this problem and, on this basis, to derive a distributed representation of the shape derivative. The theoretical framework relies on the results of V. Calisti, I. Lucardesi, and J.-F. Scheid on the shape differentiability of the solution and on the results of A. Laurain, P. T. P. Lopes, and J. C. Nakasato on the abstract Lagrangian framework for computing shape derivatives [1; 2]. It is shown that the shape derivative admits a volumetric tensor representation, linear with respect to the geometric deformation velocity field and its gradient, and, under additional smoothness assumptions, reduces to the Hadamard boundary form [1; 2; 6; 7]. The transfer of the proposed scheme to fluid–ice interaction problems with a variable ice domain is also discussed.*

Keywords: *shape sensitivity; shape derivative; distributed shape derivative; Hadamard boundary form; fluid–structure interaction; fluid–ice interaction; Lagrangian framework.*

1. Введение

Теория оптимизации формы и чувствительности по форме опирается на фундаментальные результаты Ж. Соколовского и Ж.-П. Золезио, М. Дельфура и Ж.-П. Золезио, А. Анро и М. Пьера [3–5]. В этих работах сформирован геометрический и функционально-аналитический аппарат задач на переменной области, включающий методы вариации области, объёмные и граничные представления производной по форме, а также связь геометрии области с аналитическими свойствами решений краевых задач.

В современных задачах математической физики особое значение имеет различие между распределённой и граничной формами производной по форме.

Распределённая форма является естественной слабой формой и обычно требует менее жёстких условий гладкости, тогда как граничная форма Адамара удобна для геометрической интерпретации и построения алгоритмов оптимизации границы. Их взаимосвязь детально исследована в [6; 7].

Стационарная задача взаимодействия вязкой жидкости и деформируемого тела представляет собой естественный объект такого анализа. В работе [1] исследована двумерная стационарная задача типа Стокса–упругости, в которой опорная область упругого тела рассматривается как параметр полной связанной системы. Для этой модели доказаны корректность при малых данных, дифференцируемость решения по форме и получена формула производной по форме через метод скоростей с последующим исключением материальных производных посредством сопряжённой задачи.

Работа [2] задаёт более общий уровень описания. В ней производная по форме функционала, зависящего от решения задачи с ограничением в виде уравнения в частных производных, выводится из лагранжиана, в котором оператор состояния, функционал качества и сопряжённое состояние рассматриваются как части одной конструкции. При таком подходе материальная производная, сопряжённое состояние и производная по форме возникают из единой операторно-лагранжевой схемы [2].

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы интерпретировать результат [1] в рамках схемы [2], получить распределённое тензорное представление производной по форме для стационарной задачи взаимодействия жидкости и упругого тела, а затем вывести соответствующую граничную форму Адамара. Дополнительной задачей является указание условий, при которых тот же лагранжев аппарат переносится на задачи взаимодействия жидкости и ледяного тела переменной формы. С вычислительной точки зрения такой результат представляет интерес как основа для дальнейшего построения методов спуска и методов ньютоновского типа, в том числе в топологии $W^{1,\infty}$ [8].

2. Постановка стационарной задачи

Пусть $D \subset \square^2$ — ограниченная область, $\omega Ð D_0 Ð D$, и опорная конфигурация структуры задаётся областью, а опорная область жидкости — её дополнением в D. Граница внешнего контура структуры интерпретируется как интерфейс между жидкостью и структурой, а граница внутренней области — как закреплённая часть границы структуры. Такая геометрия соответствует постановке [1]

$$\Omega_0 = D_0\ ,\quad \omega, \qquad \Omega_0^c = D\ ,\quad D_0, \qquad \Gamma_0 = \partial D_0, \qquad \Gamma_\omega = \partial\omega.$$

Структура описывается в лагранжевых координатах посредством поля смещения $w : \Omega_0 o \square^2$. Деформированная конфигурация структуры задаётся отображением и образом опорной области под этим отображением. Жидкость описывается в эйлеровых координатах через скорость u и давление p , определённые в области, дополняющей деформированную структуру и внутреннюю закреплённую часть

$$T(w) = \mathrm{Id} + w, \qquad \Omega_S = T(w)(\Omega_0), \qquad \Omega_F = D\ ,\quad (\Omega_S \cup \omega).$$

В области жидкости рассматриваются стационарные уравнения Стокса с условием прилипания на внешней границе жидкой области. В области структуры задаётся система линейной несжимаемой упругости, где s играет роль множителя Лагранжа для условия несжимаемости. На интерфейсе накладывается условие равновесия усилий [1]

$$-\nu \operatorname{div}(\nabla u) + \nabla p = f, \qquad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega_F, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_F,$$

$$-\mu \operatorname{div}(\nabla w) + \nabla s = g, \qquad \operatorname{div} w = 0 \quad \text{in } \Omega_0, \qquad w = 0 \quad \text{on } \Gamma_\omega.$$

После переноса уравнений на фиксированные области зависимость от геометрии выражается через стандартные коэффициенты переноса. В этой записи вся геометрическая зависимость сосредоточена в коэффициентах $F(w)$, $G(w)$, $J(w)$ и в интерфейсном условии [1]

$$J(w) = \det \nabla T(w), \qquad G(w) = \operatorname{cof} \nabla T(w), \qquad F(w) = (\nabla T(w))^{-1} \operatorname{cof} \nabla T(w).$$

Пусть возмущение опорной области задаётся семейством диффеоморфизмов с полем скорости геометрической деформации V. Тогда для вариационного анализа рассматривается семейство возмущённых областей и функционал качества, зависящий от решения задачи в жидкой и структурной частях

$$\Phi_t = \mathrm{Id} + tV, \qquad \Omega_{0,t} = \Phi_t(\Omega_0),$$

$$J(\Omega_0) = \int_{\Omega_0} j_S(Y, w(Y), \nabla w(Y))dY + \int_{\Omega_F} j_F(x, u(x), \nabla u(x))dx.$$

Требуется исследовать производную по форме этого функционала относительно вариаций области Ω_0.

3. Лагранжева переформулировка

Введём состояние задачи в виде четверки, состоящей из перенесённых на фиксированные области переменных жидкости и структуры. Пространство состояний строится как произведение пространств для скоростей, давлений, смещений и множителей Лагранжа

$$X = (v, q, w, s)$$

$$E := V_F \times Q_F \times V_S \times Q_S, \qquad F := E,$$

$$V_F = H_0^1(\Omega_0^c; \square^2), \quad Q_F = L_0^2(\Omega_0^c), \quad V_S = H_{0,\Gamma_\omega}^1(\Omega_0; \square^2), \quad Q_S = L^2(\Omega_0).$$

Полная стационарная задача после переноса записывается как операторное условие в F^*. Оператор $A(t, X)$ включает перенесённую систему Стокса в жидкой области, уравнение несжимаемости жидкости, перенесённую систему упругости в твёрдой области, уравнение несжимаемости структуры и интерфейсное условие равновесия усилий

$$A(t, X) = 0 \quad \text{in } F^*.$$

Функционал качества после переноса обозначим через $B(t, X)$ и введём лагранжиан

$$B(t, X) = B_S(t, w) + B_F(t, w, v),$$

$$G(t,X,P)=\langle A(t,X),P\rangle_{F^*,F}+B(t,X),\qquad P\in F.$$

Теорема 3.1

Пусть отображения $(t,X)\mapsto A(t,X)\in F^*$ и $(t,X)\mapsto B(t,X)\in$ дифференцируемы в окрестности опорного состояния X_0, и пусть линеарализованный оператор $\partial_X A(0,X_0):E\to F^*$ является изоморфизмом. Тогда:

– существует материальная производная $\dot{X}_0\in E$, удовлетворяющая уравнению $\partial_X A(0,X_0)\dot{X}_0=-\partial_t A(0,X_0)$;

– существует сопряжённое состояние $P_0\in F$, удовлетворяющее уравнению $\partial_X A(0,X_0)^* P_0=-\partial_X B(0,X_0)$;

– производная по форме функционала J в направлении поля скорости V задаётся формулой $dJ(\Omega_0)(V)=\partial_t G(0,X_0,P_0)$.

Доказательство

Поскольку оператор состояния $A(t,X)$ и функционал $B(t,X)$ дифференцируемы в окрестности $(0,X_0)$, а оператор $\partial_X A(0,X_0):E\to F^*$ является изоморфизмом, к уравнению $A(t,X_t)=0$ применима теорема о неявной функции в банаховых пространствах. Следовательно, существует дифференцируемое по t семейство состояний X_t, а его производная $\dot{X}_0$ удовлетворяет равенству $\partial_X A(0,X_0)\dot{X}_0=-\partial_t A(0,X_0).$

Так как сопряжённый оператор также является изоморфизмом, существует единственное сопряжённое состояние P_0, определяемое уравнением

$$\partial_X A(0,X_0)^* P_0=-\partial_X B(0,X_0).$$

Дифференцирование лагранжиана по t в точке $t=0$ даёт формулу

$$dJ(\Omega_0)(V)=\partial_t G(0,X_0,P_0).$$

Утверждение является прямым следствием абстрактной теоремы [2].

Замечание 3.1. Теорема 3.1 задаёт операторно-лагранжев фундамент дальнейшего анализа: все последующие формулы производной по форме являются конкретизацией выражения $\partial_t G(0, X_0, P_0)$.

4. Распределённая производная по форме

По Теореме 3.1

$$dJ(\Omega_0)(V) = \partial_t G(0, X_0, P_0).$$

В постановке [1] это означает исключение материальных производных $\dot{v}$ и $\dot{w}$ из окончательной формулы. В выражении для производной по форме остаются прямое состояние, сопряжённое состояние и геометрические производные коэффициентов переноса.

Производные $DJ(V)$, $DG(V)$, $DF(V)$ линейны по ∇V, тогда как производные объёмных сил дают члены, линейные по самому V [1]. Следовательно, производная по форме должна иметь вид линейного функционала по V и ∇V.

Теорема 4.1

Пусть выполнены предположения Теоремы 3.1. Тогда существуют поля

$$S_F^0 : \Omega_0^c \to \square^{\,2}, \qquad S_F^1 : \Omega_0^c \to \square^{\,2\times 2},$$

$$S_S^0 : \Omega_0 \to \square^{\,2}, \qquad S_S^1 : \Omega_0 \to \square^{\,2\times 2},$$

зависящие от прямого состояния, сопряжённого состояния, коэффициентов задачи и геометрии опорной конфигурации, такие, что производная по форме допускает представление

$$dJ(\Omega_0)(V) = \int_{\Omega_0^c} \left(S_F^0 \cdot V + S_F^1 : \nabla V \right) dx + \int_{\Omega_0} \left(S_S^0 \cdot V + S_S^1 : \nabla V \right) dY.$$

Доказательство

Из Теоремы 3.1 следует представление $dJ(\Omega_0)(V) = \partial_t G(0, X_0, P_0)$. После подстановки формул из [1] получаем сумму интегралов, содержащих коэффициенты при $DJ(V)$, $DG(V)$, $DF(V)$, линейные по ∇V, и коэффициенты при производных объёмных сил, линейные по V. Поэтому всё выражение

линейно по V и ∇V. Группировка коэффициентов при V и ∇V в жидкой и структурной областях даёт поля $S_F^0, S_F^1, S_S^0, S_S^1$, для которых верна указанная формула.

Замечание 4.1. Формула для $dJ(\Omega_0)(V)$ представляет собой распределённую производную по форме. Она является естественной слабой объёмной формой производной и соответствует общей тензорной логике работ [2], [6], [7].

Замечание 4.2. Тензоры $S_F^0, S_F^1, S_S^0, S_S^1$ допустимо определять как коэффициенты при V и ∇V, возникающие после подстановки формул для $DJ(V)$, $DG(V)$, $DF(V)$ в лагранжеву производную $\partial_t G(0, X_0, P_0)$. Полные покомпонентные выражения естественно выносить в приложение.

5. Переход к граничной форме Адамара

Распределённое представление может быть преобразовано к граничной форме при дополнительной гладкости границы и решений.

Теорема 5.1

Пусть границы Γ_0, ∂D, Γ_ω обладают гладкостью, достаточной для применения формулы Грина, а прямое и сопряжённое состояния имеют регулярность, обеспечивающую существование следов и интегрирование по частям. Тогда производная по форме допускает граничное представление

$$dJ(\Omega_0)(V) = \int_{\Gamma_0} g_{\Gamma_0} (V \cdot n_0) ds,$$

где $g_{\Gamma_0} = (S_F^1 n_0 - S_S^1 n_0) \cdot n_0.$

Доказательство

Интегрирование по частям в жидкой и структурной областях даёт

$$\int_{\Omega_0^c} S_F^1 : \nabla V \, dx = -\int_{\Omega_0^c} \mathrm{div} S_F^1 \cdot V \, dx + \int_{\partial\Omega_0^c} (S_F^1 n_F) \cdot V \, ds,$$

$$\int_{\Omega_0} S_S^1 : \nabla V \, dY = -\int_{\Omega_0} \mathrm{div} S_S^1 \cdot V \, dY + \int_{\partial\Omega_0} (S_S^1 n_S) \cdot V \, ds.$$

Поскольку речь идёт о производной по форме, объёмные слагаемые обращаются в нуль в смысле распределений:

$$S_F^0 - \operatorname{div} S_F^1 = 0 \quad \text{in } \Omega_0^c, \qquad S_S^0 - \operatorname{div} S_S^1 = 0 \quad \text{in } \Omega_0.$$

На неподвижных участках внешней границы поле V равно нулю, поэтому остаётся только вклад по интерфейсу Γ_0. С учётом соотношения $n_F = -n_S =: n_0$ имеем

$$dJ(\Omega_0)(V) = \int_{\Gamma_0} (S_F^1 n_0 - S_S^1 n_0) \cdot V \, ds.$$

Далее применяется структурная теорема Адамара: производная по форме зависит только от нормальной компоненты $V \cdot n_0$. Поэтому существует скалярная плотность g_{Γ_0}, для которой верна указанная формула.

Замечание 5.1. Теорема 5.1 показывает, что граничная форма Адамара не противопоставляется распределённой форме, а возникает из неё как следствие при повышенной регулярности [2], [6], [7].

Замечание 5.2. Формула $dJ(\Omega_0)(V) = \int_{\Gamma_0} g_{\Gamma_0} (V \cdot n_0) ds$ имеет прямой механический смысл: в первом порядке на значение функционала влияет только нормальное смещение интерфейса; касательная компонента соответствует перепараметризации границы.

6. Перенос на задачи взаимодействия жидкости и ледяного тела

Рассмотрим более общий класс задач, в которых твердотельная часть описывается не линейной несжимаемой упругостью, а моделью ледяного тела. Пусть после переноса на фиксированные области состояние имеет вид

$$X_{ice} = (v, q, w, \sigma, \vartheta, \ldots) \in E_{ice},$$

а система записывается как

$$A_{ice}(t, X_{ice}) = 0.$$

Функционал качества обозначим через

$$B_{ice}(t, X_{ice}),$$

и введём лагранжиан

$$G_{ice}(t, X_{ice}, P_{ice}) = \langle A_{ice}(t, X_{ice}), P_{ice} \rangle + B_{ice}(t, X_{ice}).$$

Теорема 6.1

Пусть отображения $(t, X) \mapsto A_{ice}(t, X) \in F_{ice}^{*}$ и $(t, X) \mapsto B_{ice}(t, X) \in$ дифференцируемы в окрестности опорного состояния $X_{ice,0}$, а оператор

$$\partial_X A_{ice}(0, X_{ice,0}) : E_{ice} \to F_{ice}^{*}$$

является изоморфизмом. Тогда:

– существует материальная производная $\dot{X}_{ice}$, удовлетворяющая уравнению $\partial_X A_{ice}(0, X_{ice,0}) \dot{X}_{ice} = -\partial_t A_{ice}(0, X_{ice,0})$;

– существует сопряжённое состояние $P_{ice,0}$, удовлетворяющее уравнению $\partial_X A_{ice}(0, X_{ice,0})^{*} P_{ice,0} = -\partial_X B_{ice}(0, X_{ice,0})$;

– производная по форме задаётся формулой $dJ_{ice}(\Omega_0)(V) = \partial_t G_{ice}(0, X_{ice,0}, P_{ice,0})$.

Доказательство

После замены оператора линейной упругости на оператор ледяного тела задача сохраняет ту же абстрактную структуру. По предположению отображения A_{ice} и B_{ice} дифференцируемы, а оператор

$$\partial_X A_{ice}(0, X_{ice,0}) : E_{ice} \to F_{ice}^{*}$$

является изоморфизмом. Следовательно, к системе применима та же абстрактная теорема [2], что и в Теореме 3.1. Отсюда следуют существование материальной производной, существование сопряжённого состояния и формула

$$dJ_{ice}(\Omega_0)(V) = \partial_t G_{ice}(0, X_{ice,0}, P_{ice,0}).$$

Замечание 6.1. Теорема 6.1 фиксирует основной принцип переноса: смена модели материала не разрушает лагранжев аппарат производной по форме, если сохраняются его операторные предпосылки.

Замечание 6.2. Наиболее естественными направлениями применения Теоремы 6.1 являются модели линейно-упругого, термоупругого и квазистатически вязкоупругого льда. В каждом из этих случаев меняется состав состояния и сопряжённого состояния, но не меняется лагранжева логика вывода.

7. Заключение

Построена лагранжева интерпретация стационарной двумерной задачи взаимодействия вязкой жидкости и деформируемого тела на переменной области. Конкретный анализ чувствительности по форме для модели типа Стокса–упругости, выполненный в [1], встроен в общий аппарат [2].

Основным результатом является получение распределённого тензорного представления производной по форме, которое затем редуцируется к граничной форме Адамара. Это выявляет геометрическую сущность производной по форме: она определяется только нормальным смещением интерфейса.

Дополнительно предложен общий принцип переноса того же лагранжева аппарата на задачи взаимодействия жидкости и ледяного тела переменной формы. С вычислительной точки зрения дальнейшее развитие связано с построением методов спуска и методов ньютоновского типа в топологии $W^{1,\infty}$, где информация о первых и вторых производных по форме используется как основа алгоритмов оптимизации формы [8].

Использованные источники

1. Calisti, V. Shape sensitivity analysis of a 2D fluid–structure interaction problem / V. Calisti, I. Lucardesi, J.-F. Scheid // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2023. — Vol. 199. — P. 36–79.
2. Laurain, A. An abstract Lagrangian framework for computing shape derivatives / A. Laurain, P. T. P. Lopes, J. C. Nakasato // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. — 2023. — Vol. 29. — Art. 5.
3. Sokołowski, J. Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis / J. Sokołowski, J.-P. Zolésio. — Berlin : Springer-Verlag, 1992. — 250 p.

4. Delfour, M. C. Shapes and geometries: metrics, analysis, differential calculus, and optimization / M. C. Delfour, J.-P. Zolésio. — 2nd ed. — Philadelphia : SIAM, 2011. — 445 p.
5. Henrot, A. Shape variation and optimization: a geometrical analysis / A. Henrot, M. Pierre. — Zürich : European Mathematical Society, 2018. — 399 p.
6. Laurain, A. Distributed and boundary expressions of first and second order shape derivatives in nonsmooth domains / A. Laurain // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 2020. — Vol. 134. — P. 328–368.
7. Laurain, A. Distributed shape derivative via averaged adjoint method and applications / A. Laurain, K. Sturm // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. — 2016. — Vol. 50. — P. 1241–1267.
8. Deckelnick, K. PDE-constrained shape optimization with first-order and Newton-type methods in the $W^{1,\infty}$ topology / K. Deckelnick, P. J. Herbert, M. Hinze // Optimization Methods and Software. — 2024. — P. 1–27 — DOI: 10.1080/10556788.2024.2424525.