

**УДК 621.396.677.33**

**Новиков Николай Анатольевич**, магистрант, Кубанский Государственный Университет, г. Краснодар

**Алаторцев Семён Константинович**, магистрант, Кубанский Государственный Университет, г. Краснодар

**Призов Алексей Сергеевич**, магистрант, Кубанский Государственный Университет, г. Краснодар

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ MUSIC И MIN-NORM ДЛЯ КОЛЬЦЕВЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК В УСЛОВИЯХ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ**

**Аннотация**

В работе представлен сравнительный анализ подпространственных алгоритмов сверхразрешения MUSIC и Min-Norm применительно к кольцевым антенным решёткам с учётом взаимного влияния элементов. Рассматривается влияние электромагнитной связи между излучателями и аддитивного шума на точность оценки направлений прихода сигналов. Проведено численное моделирование для различных уровней взаимной связи, включая идеализированный случай, умеренное и сильное взаимодействие. Показано, что наличие взаимного влияния приводит к нарушению ортогональности сигнального и шумового подпространств, что снижает эффективность обоих алгоритмов. Установлено, что алгоритм MUSIC демонстрирует большую устойчивость к искажениям модели по сравнению с методом Min-Norm.

**Annotation**

This article presents a comparative analysis of subspace-based super-resolution algorithms, MUSIC and Min-Norm, applied to circular antenna arrays under mutual coupling conditions. The study focuses on the impact of electromagnetic interaction between array elements and additive noise on the accuracy of direction-of-arrival (DOA) estimation. Numerical simulations are

carried out for different coupling scenarios, including ideal, moderate, and strong mutual interaction. It is shown that mutual coupling distorts the orthogonality between signal and noise subspaces, leading to degradation in estimation performance. The results demonstrate that the MUSIC algorithm exhibits higher robustness to model distortions compared to the Min-Norm method, particularly under low signal-to-noise ratio conditions.

**Ключевые слова:** кольцевая антенная решётка, сверхразрешение, MUSIC, Min-Norm, взаимное влияние элементов, DOA, подпространственные методы, псевдоспектр, оценка направления прихода

**Keywords:** circular antenna array, super-resolution, MUSIC, Min-Norm, mutual coupling, DOA estimation, subspace methods, pseudospectrum, signal processing

**Устройство приемной системы. Модель взаимного влияния элементов решётки.**

Кольцевая фазированная антенная решётка (КФАР) представляет собой систему из  $N$  равномерно расположенных излучателей, размещённых по окружности радиуса  $r$ . Такая геометрия обеспечивает равномерное покрытие азимутальной плоскости и широко применяется в задачах определения направления прихода сигналов (DOA)

В реальных условиях элементы решётки электромагнитно взаимодействуют между собой, что приводит к взаимному влиянию (mutual coupling). В отличие от идеализированной модели, где элементы считаются независимыми, в данном случае принимаемый сигнал на каждом элементе определяется не только падающей волной, но и токами, индуцированными в соседних элементах. Это приводит к искажению амплитудно-фазового распределения сигналов по апертуре решётки [2].

Пусть на 7-элементную КФАР падают  $d$  узкополосных плоских волн с направлениями  $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_d\}$ . Тогда сигнал на выходе антенной решётки можно представить в виде:

$$x(t) = C A(\theta)s(t) + n(t),$$

Где:

$x(t)$  – вектор наблюдений;

$s(t)$  – вектор сигналов источников;

$n(t)$  – аддитивный шум;

$A(\theta)$  – матрица направленности идеальной решётки;

$C$  – матрица взаимного влияния элементов.

Матрица направленности формируется из векторов направленности для каждого источника:

$$A(\theta) = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_d)]$$

Где вектор направленности для кольцевой решётки определяется как [3]:

$$a(\theta) = \begin{bmatrix} e^{jkr \cos(\theta - \varphi_1)} \\ e^{jkr \cos(\theta - \varphi_2)} \\ \vdots \\ e^{jkr \cos(\theta - \varphi_N)} \end{bmatrix}, \varphi_N = \frac{2\pi(n-1)}{N}, N = 7$$

Матрица взаимного влияния  $C$  описывает электромагнитную связь между элементами решётки. Для кольцевых структур она обладает квазициркулянтной структурой, обусловленной симметрией расположения элементов [4]. В общем случае:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & 1 & c_1 & \cdots & c_3 & c_2 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Где коэффициенты  $c_i$  характеризуют степень взаимодействия между элементами и убывают с увеличением расстояния между ними.

С учетом взаимного влияния вводится эффективная матрица направленности:

$$\tilde{A}(\theta) = CA(\theta)$$

и модель сигнала принимает окончательный вид:

$$x(t) = \tilde{A}(\theta)s(t) + n(t)$$

Для последующего применения алгоритмов сверхразрешения формируется выборочная корреляционная матрица:

$$R_{xx} = E\{x(t)x^H(t)\}$$

С учетом введённой модели она может быть представлена как:

$$R_{xx} = C A R_s A^H C^H + R_n,$$

Где  $R_s$  – корреляционная матрица сигналов,  $R_n$ - корреляционная матрица шума.

Методы сверхразрешения основаны на идее разложения корреляционной матрицы на сигнальное и шумовое подпространства [1], которые ввиду своей ортогональности приводят к резкому возрастанию точности определения угла прихода сигнала. Однако наличие матрицы взаимного влияния элементов решётки приводит к искажению формы

векторов направленности, нарушению ортогональности подпространств, что приводит к ухудшению точности оценки углов прихода сигнала.

## Метод MUSIC

Метод MUSIC (Multiple Signal Classification) относится к подпространственным методам сверхразрешения и основан на разложении корреляционной матрицы на сигнальное и шумовое подпространства.

Исходя из модели сигнала с учетом взаимного влияния элементов формируется корреляционная матрица, для которой выполняется собственное разложение матрицы [1]:

$$R_{xx} = V\Lambda V^H,$$

Где  $\Lambda$  – диагональная матрица собственных значений,  $V$  – матрица собственных векторов

Собственные векторы, соответствующие  $d$  наибольшим собственным значениям, образуют сигнальное подпространство  $V_s$ , а остальные — шумовое подпространство  $V_n$ . В идеальном случае выполняется ортогональность:

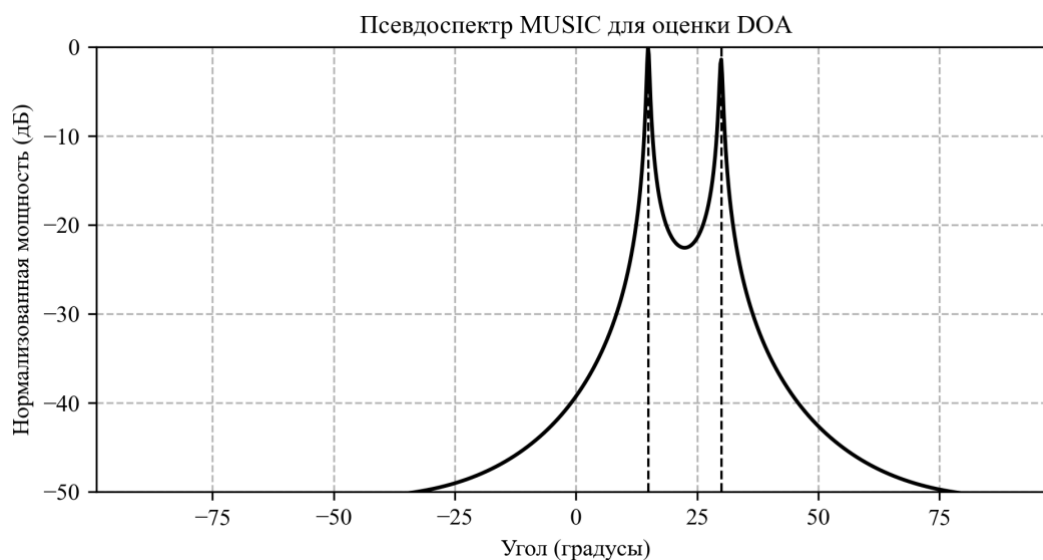
$$\tilde{a}(\theta_i)^H V_n = 0.$$

На этом свойстве строится псевдоспектр MUSIC:

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\tilde{a}^H(\theta) V_n V_n^H \tilde{a}(\theta)}$$

Оценки направлений прихода сигналов соответствуют максимумам данной функции.

Для иллюстрации работы метода MUSIC на рисунке 1 представлен псевдоспектр полученный для кольцевой антенной решетки, состоящей из 7 элементов при отношении сигнал/шум 20 дБ. В рассматриваемом случае моделируются два источника сигналов с направлениями прихода  $\theta_1$  и  $\theta_2$  равным  $15^\circ$  и  $30^\circ$  соответственно.



**Рисунок 1 – Псевдоспектр полученный с помощью алгоритма MUSIC**

В идеальном случае, псевдоспектр которого указан на рисунке 1 отсутствует взаимное влияние элементов решётки, благодаря чему достигается максимальная точность измерений.

### **Метод минимальной нормы**

Метод Min-Norm (метод минимальной нормы) относится к классу подпространственных методов сверхразрешения и представляет собой альтернативу алгоритму MUSIC. В отличие от MUSIC, где оценка направления прихода сигналов основана на вычислении псевдоспектра через проекцию направляющего вектора на шумовое подпространство, в методе

Min-Norm используется сконструированный вектор минимальной нормы, ортогональный сигнальному подпространству [5].

Аналогично методу MUSIC метод Min-Norm использует разложение корреляционной матрицы сигнала на сигнальное и шумовое подпространства, однако в отличие от MUSIC, где используется проекция на шумовое подпространство, в данном методе вводится вектор  $g$ , обладающий минимальной нормой и удовлетворяющий условию ортогональности к сигнальному подпространству:

$$V_s^H g = 0$$

Дополнительно вводится нормировочное условие, фиксирующее масштаб вектора:

$$a^H(\theta_0)g = 1$$

Решение данной задачи позволяет получить вектор  $g$ , который минимизирует энергию вне направления сигнала и используется для формирования пространственного спектра, причем псевдоспектр Min-Norm определяется выражением:

$$P_{MN}(\theta) = \frac{1}{|a^H(\theta_0)g|^2}$$

Также, как и в методе MUSIC, оценка направлений прихода сигналов определяется положениями максимумов данной функции.

На рисунке 2 представлен псевдоспектр полученный методом Min-Norm. Параметры моделирования те же, что были представлены ранее для метода MUSIC.

***Рисунок 2 – Псевдоспектр полученный алгоритмом Min-Norm***

Следует отметить, что в условиях наличия взаимного влияния элементов антенной решётки матрица  $C$  искажает структуру направляющих векторов, что приводит к нарушению ортогональности между сигнальным и шумовым подпространствами. В результате ухудшается корректность формирования вектора  $g$ , что снижает разрешающую способность метода Min-Norm.

Таким образом, несмотря на вычислительную простоту и отсутствие необходимости проведения пространственного поиска, метод Min-Norm обладает чувствительностью к модельным ошибкам и взаимному влиянию элементов, что необходимо учитывать при его применении в составе кольцевых антенных решёток [5].

### **Анализ точности методов в условиях взаимного влияния элементов решётки**

Анализ устойчивости алгоритмов к взаимному влиянию проводился путем численного моделирования для кольцевой антенной решетки в трех различных электродинамических конфигурациях. Рассматривались: идеализированный случай при отсутствии межканальной связи  $C = I$ , модель с умеренной взаимной связью (коэффициенты первого порядка  $|c_1| = 0.08$ ) и сценарий с выраженным взаимным влиянием ( $|c_1| = 0.2$ ), характерным для малых расстояний между излучателями. Отношение сигнал/шум в каждом сценарии равнялось 10 дБ.

Результаты моделирования, представленные на рисунке 3, демонстрируют трансформацию псевдоспектра MUSIC при усилении взаимного влияния элементов.

***Рисунок 3 – Псевдоспектры MUSIC при различных сценариях взаимного влияния элементов решётки***

В идеализированном случае алгоритм обеспечивает формирование четко выраженных пиков, точно соответствующих истинным углам прихода сигналов.

При переходе к модели с умеренной связью наблюдается заметное расширение главных лепестков псевдоспектра и подъем уровня шума, что свидетельствует о искажении формы векторов направленности.

В сценарии с выраженным взаимным влиянием происходит критическое снижение разрешающей способности: пики псевдоспектра становятся неразличимыми, а их максимумы смещаются относительно истинных значений. Данный сценарий подтверждает вывод о существенной чувствительности метода к межканальной связи в условиях низкого отношения сигнал/шум.

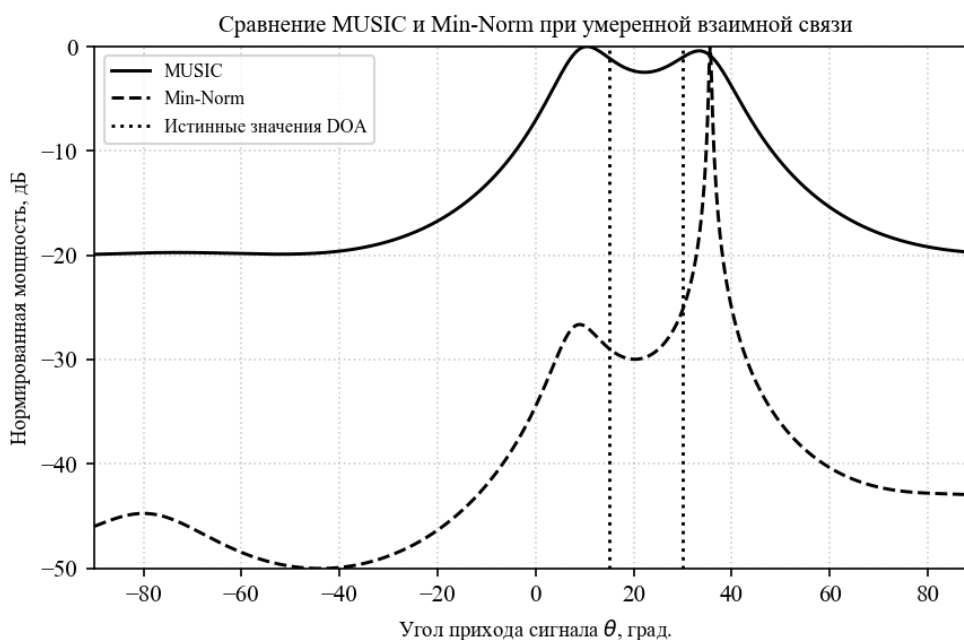
На рисунке 4 представлен аналогичный анализ устойчивости метода Min-Norm.

***Рисунок 4 – Псевдоспектры Min-Norm при различных сценариях взаимного влияния элементов решётки***

В идеализированном случае метод Min-Norm обеспечивает формирование узких и отчётливо выраженных пиков, соответствующих истинным направлениям прихода сигналов. При этом ширина главных лепестков сопоставима, а в ряде случаев несколько меньше, чем у метода MUSIC, что свидетельствует о высокой разрешающей способности метода в условиях корректной модели.

При наличии умеренной взаимной связи наблюдается более выраженное, по сравнению с MUSIC, искажение псевдоспектра. Происходит увеличение ширины главных лепестков и рост уровня боковых лепестков, что указывает на нарушение ортогональности между сигнальным подпространством и вектором минимальной нормы. В результате пики становятся менее контрастными, что затрудняет их точную локализацию. На

рисунке 5 представлено сравнение псевдоспектров методов MUSIC и Min-Norm в условиях умеренной взаимной связи элементов антенной решётки.



**Рисунок 5 – Псевдоспектры MUSIC и Min-Norm в сценарии умеренной взаимной связи**

Полученные результаты показывают, что в условиях умеренной взаимной связи алгоритм MUSIC формирует более широкие (менее острые) максимумы, однако их положения оказываются ближе к истинным значениям углов прихода сигналов (средняя ошибка угла составляет  $3.9^\circ$ , против  $4.5^\circ$  для Min-Norm). В то же время метод Min-Norm обеспечивает более узкие максимумы, но при этом наблюдается их смещение и увеличение уровня фоновых значений псевдоспектра. Таким образом, объединённое представление результатов демонстрирует компромисс между точностью локализации и «резкостью» спектральных пиков, а также подтверждает более высокую устойчивость алгоритма MUSIC к влиянию взаимной связи элементов антенной решётки.

## Заключение

На основании проведенного численного моделирования и сравнительного анализа подпространственных алгоритмов MUSIC и Min-Norm для кольцевых антенных решеток установлено, что электромагнитная связь между излучателями является критическим фактором, детерминирующим точность оценки направления прихода сигналов. Взаимное влияние элементов приводит к нелинейному искажению векторов направленности и нарушению условий ортогональности сигнального и шумового подпространств, что манифестируется в расширении главных лепестков псевдоспектра и смещении оценок DOA относительно истинных значений [4].

Анализ подтвердил, что электромагнитная связь между излучателями кольцевой решетки критически снижает точность оценки DOA, вызывая нарушение ортогональности подпространств. Это приводит к деформации псевдоспектра: расширению главных лепестков и смещению их максимумов относительно истинных координат источников.

MUSIC проявил большую устойчивость к искажениям: средняя угловая ошибка составила  $3.9^\circ$  против  $4.5^\circ$  у Min-Norm. Метод Min-Norm, обладая высокой разрешающей способностью в идеальной модели, демонстрирует деградацию точности при росте межканальной связи. Вследствие этого для практических задач предпочтительна реализация алгоритма MUSIC.

## Литература

1. Коптев, В. А. Теоретические основы, области применения и характеристики методов сверхразрешения для измерительных радиотехнических систем / В. А. Коптев // Экономика и качество систем связи. – 2025. – Т. 2, № 36. – С. 66–73.

2. Ратынский, М. В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках / М. В. Ратынский. – Москва: Радио и связь, 2003. – 197 с. – ISBN 5-256-01698-9.
3. Чернов, Н. Н. Сигналы: формирование, обнаружение и обработка: учеб.-метод. пособие / Н. Н. Чернов, А. П. Морозов. – Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2016. – 51 с.
4. Chu, J. Reducing Mutual Coupling in Circular Motion-Based DOA Estimation: An Iterative Array Configuration Method / J. Chu, Z. Zhang, C. Kang [и др.] // IEEE Signal Processing Letters. – 2025. – P. 2314–2318. – DOI: 10.1109/LSP.2025.3575018.
5. Naceur, A. Direction-of-arrival estimation with new versions of Min-Norm algorithm based on Nyström method / A. Naceur, K. Ali // 2022 7th International Conference on Image and Signal Processing and their Applications (ISPA). – 2022. – P. 1–5.

#### **Literature**

1. Koptev, V. A. Theoretical foundations, fields of application and characteristics of super-resolution methods for measuring radio-technical systems / V. A. Koptev // Economics and Quality of Communication Systems. – 2025. – № 36. – P. 66–73.
2. Ratynsky, M. V. Adaptation and super-resolution in antenna arrays / M. V. Ratynsky. – Moscow: Radio i svyaz, 2003. – 197 P. – ISBN 5-256-01698-9.
3. Chernov, N. N. Signals: formation, detection and processing: educational and methodical manual / N. N. Chernov, A. P. Morozov. – Taganrog: Southern Federal University Press, 2016. – 51 P.
4. Chu, J. Reducing Mutual Coupling in Circular Motion-Based DOA Estimation: An Iterative Array Configuration Method / J. Chu, Z. Zhang, C. Kang [et al.] // IEEE Signal Processing Letters. – 2025. – P. 2314–2318. – DOI: 10.1109/LSP.2025.3575018.
5. Naceur, A. Direction-of-arrival estimation with new versions of Min-Norm algorithm based on Nyström method / A. Naceur, K. Ali // 2022 7th

International Conference on Image and Signal Processing and their Applications (ISPA). – 2022. – P. 1–5.