А.А.Седреева,

студентка Ульяновского государственного технического университета

Научный руководитель: С.В.Киреев, *кандидат физико-математических наук, доцент*

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Аннотация

Статья посвящена исследованию методов целочисленного линейного программирования (ЦЛП) как инструмента решения задач дискретной оптимизации в экономике и производстве. Рассмотрены теоретические основы целочисленного программирования, его отличия от непрерывного линейного программирования, а также классификация задач по признаку полной и частичной целочисленности переменных. Проведён сравнительный анализ двух ключевых методов решения задач ЦЛП: метода отсекающих плоскостей Гомори и метода ветвей и границ. Описаны алгоритмы каждого из методов, их вычислительные особенности и области применения. На конкретном примере задачи оптимизации закупки производственного оборудования с ограничениями по площади и бюджету продемонстрировано практическое применение метода Гомори. В результате получен оптимальный целочисленный план, обеспечивающий максимальное увеличение выпуска продукции. Сделан вывод о перспективности развития целочисленного программирования в условиях роста вычислительных мощностей, внедрения квантовых технологий и искусственного интеллекта.

Ключевые слова: целочисленное программирование, целочисленное линейное программирование, метод Гомори, метод ветвей и границ, дискретная оптимизация, симплекс-метод, задача о ранце, оптимизация производства.

Abstract

The article examines the methods of integer linear programming (ILP) as a tool for solving discrete optimization problems in economics and manufacturing. The theoretical foundations of integer programming are considered, including its distinctions from continuous linear programming and the classification of problems by full and partial integrality of variables. A comparative analysis of two key ILP solution methods is conducted: the Gomory cutting plane method and the branch and bound method. The algorithms of each method, their computational features and application areas are described. Using a specific example of optimizing the purchase of production equipment subject to space and budget constraints, the practical application of the Gomory method is demonstrated. As a result, an optimal integer plan is obtained that ensures maximum output growth. The conclusion is drawn regarding the promising prospects of integer programming in the context of growing computational power, quantum technologies, and artificial intelligence.

Keywords: integer programming, integer linear programming, Gomory method, branch and bound method, discrete optimization, simplex method, knapsack problem, production optimization.

Введение

При решении широкого круга прикладных задач в экономике, логистике, производстве и управлении ресурсами к искомым решениям предъявляется требование целочисленности, поскольку многие реальные объекты — единицы оборудования, персонал, транспортные маршруты — не допускают дробного представления [1,3,6]. Классические методы линейного программирования в таких случаях оказываются недостаточными, что обусловливает необходимость применения специализированного математического аппарата — целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Несмотря на значительный теоретический задел, сформированный начиная с середины XX века, задачи ЦЛП сохраняют высокую практическую актуальность в условиях усложнения производственных процессов и роста объёмов оптимизационных расчётов [2,4]. Целью настоящего исследования является систематизация теоретических основ и алгоритмов целочисленного линейного программирования, сравнительный анализ метода отсекающих плоскостей Гомори и метода ветвей и границ, а также демонстрация практического применения метода Гомори на примере задачи оптимизации закупки производственного оборудования в условиях ограниченных ресурсов.

Материалы и методы

В основу исследования положены труды отечественных и зарубежных учёных в области математического программирования и дискретной оптимизации, а также классические результаты теории целочисленного линейного программирования, включая работы Р. Гомори, заложившего алгоритмические основы метода отсекающих плоскостей. В качестве методов исследования используются: анализ и систематизация научной литературы по проблематике целочисленной оптимизации; сравнительный анализ алгоритмов метода Гомори и метода ветвей и границ по критериям вычислительной сложности, надёжности и области применения; математическое моделирование — при формализации задачи оптимизации закупки производственного оборудования в виде задачи целочисленного линейного программирования; симплекс-метод и двойственный симплекс-метод — как вычислительный инструментарий поэтапного получения целочисленного оптимального решения посредством последовательного введения отсекающих ограничений.

Результаты и обсуждения

Целочисленное программирование отличается от линейного тем, что переменные здесь ограничиваются целочисленными значениями, обычно — неотрицательными целыми числами.

В условиях целочисленности рассматриваемое множество решений представлено дискретными точками, при этом выпуклость теряется. Однако, введение ограничений для координат целочисленных точек формирует выпуклый многогранник решений, который ограничен координатными осями и новообразованным многоугольным контуром [5]. Это обстоятельство порождает задачу линейного программирования с особенными характеристиками:

1. Все целочисленные точки начального многогранника включаются; ограничения, замыкающие выпуклое множество целочисленных точек, дают многогранник, вершины которого являются целочисленными;

2.При этом максимум линейного функционала достигается в угловой точке множества ограничений, образующего область допустимых решений; введение ограничений, обеспечивающих целочисленность вершин, гарантирует оптимальное решение с целочисленными координатами.

Целочисленное программирование — направление математической оптимизации, изучающее проблемы, в которых все переменные представлены целочисленными значениями. Задачи с набором исключительно целочисленных переменных называются полностью целочисленными, а в случае целочисленности только некоторых переменных — частично целочисленными. Такая классификация определяет методологические подходы к поиску решений и способ формального представления моделей.

Если обе функциональные части задачи имеют линейную структуру, ее выделяют в класс целочисленного линейного программирования (ЦЛП) и применяют специально адаптированные методы линейного программирования, учитывающие дискретность переменных и заметно возросшую вычислительную сложность.

Пути возникновения задач ЦЛП:

1. Существуют задачи, которые формально к целочисленным не относятся, но при соответствующих исходных данных имеют план получения оптимальных значений, являющихся целыми числами; характерно для транспортных задач и ряда частных случаев (например, задачи о назначениях и оптимизации потоков в сетях).

2. Существование задач с физически неделимыми переменными, заданными в виде дискретных величин, обусловило формулирование задач

оптимизации с целочисленными ограничениями: ограничение множества допустимых планов целочисленными векторами обеспечивает решение задач оптимального распределения.

3. Теоретическая база целочисленного программирования строится вокруг анализа задач экстремума для линейной функции, заданной на конечном множестве: замена начальных переменных другими, альтернативными, приводит к постановке задачи в рамках дискретной оптимизации. Эта методология используется для решения задач коммивояжера и назначения, а также в задачах планирования и формирования расписаний, в том числе при обработке ограничений, выраженных логически формами «или», - «если - то».

Исследования в области целочисленного программирования начались с постановки задачи персонала, опубликованной в 1932 году венгерским математиком Э. Эгервари, Важным событием, способствовавшим развитию этой области, стало обсуждение в 1955 году на Втором симпозиуме по линейному программированию задачи, известной как «задача о ранце», в которой рассматривались вопросы оптимизации при использовании бомбардировщика. Дискретная природа переменных и комбинаторная структура по отношению к непрерывным аналогам формируют специфические алгоритмические требования: выделение модулей перебора и отсечения; применение целочисленных методов оптимизации и эвристических подходов для повышения вычислительной эффективности.[2]

Решение задач целочисленного программирования не достигается простым округлением значений переменных, полученных при решении заданий без учета целочисленности: полученное решение может не соответствовать ограничениям, а при их соблюдении качество решения оказывается существенно ниже оптимального.

Классификация методов целочисленной оптимизации структурирована по двум главным направлениям:

1) методы отсечений;

2) комбинаторные методы.

Рассмотрение задач в рамках методов отсечений включает решение исходной задачи без учета дополнительных требований; после определения оптимального решения вводятся специальные дополнительные ограничения на каждой итерации, отражающие требование целочисленности. Итеративное добавление ограничений вызывает поэтапную деформацию многоугольника допустимых решений, завершающуюся достижением целочисленных координат оптимального решения.

Метод Гомори (метод отсекающих плоскостей) занимает ведущее место среди методов отсечения. Введение дополнительных ограничений обеспечивает отсечение областей множества решений многоугольного (многогранного) вида, не содержащих точек с целочисленными координатами.

Дополнительное ограничение, отражающее требование целочисленности, должно удовлетворять ряду условий:

1) линейность: формулировка в виде линейного неравенства; механизм — использование линейной комбинации переменных; следствие — сохранение выпуклости множества допустимых решений;

2) отсечение оптимального плана с дробными значениями: условие — оптимум с нецелочисленными компонентами;

3) сохранение целочисленных решений: условие — выполнение дополнительного ограничения всеми целочисленными решениями; такое ограничение именуется правильным отсечением.

Алгоритм метода Гомори описывает последовательность этапов, при которых исходное решение задачи линейного программирования преобразуется в целочисленное. Механизм включает переход от непрерывного симплексного решения к целочисленному путем поэтапного введения дробных отсечений, дополнительных переменных и перестройки базиса; результатом становится формирование целочисленного опорного решения.

1) Решение задачи линейного программирования осуществляется без учета требования целочисленности.

Проверка целочисленности - завершение решения при целочисленных значениях переменных оптимального плана.

2) При дробных элементах оптимального плана осуществляется процедура разбиения- выделение дробных позиций.

Определение компонента с максимально выраженной величиной в дробной части и проведение предварительной обработки.

Формулирование дополнительного ограничения (сечения), направленного на исключение решений с дробными значениями.

3) Далее решается уравнение, с проведением операции введения новой неотрицательной переменной; включение добавленного параметра в оптимальную симплекс-таблицу.

4) Осуществляется поиск решения расширенной задачи посредством двойственного симплексного метода: в случае выявления целочисленного нового оптимального плана задача решена; при выявлении отсутствия целочисленности — возврат к пункту 2 алгоритма.

Высокая эффективность вычислительных процедур не обеспечивается при любых вариантах отсечения.

Базой ***комбинаторных методов*** является идея полного перебора допустимых целочисленных решений. К этой группе методов можно отнести метод ветвей и границ: ***процедура решения задачи без учета целочисленности и дальнейшее её деление на две более простые подзадачи,*** при этом отбрасываются те области решений, в которых отсутствуют допустимые целочисленные решения.

Алгоритм метода ветвей и границ:

1. Поиск решения задачи целочисленного программирования без установления условия целочисленности

2. Формирование дополнительных ограничений на дробные компоненты плана: при наличии дробных значений вводятся линейные ограничения на соответствующие переменные.

3. Решение двух дочерних задач с введенными ограничениями на целевую компоненту.

4. Формирование при необходимости дополнительных ограничений: в соответствии с четырьмя возможными случаями ветвления осуществляется последовательная проверка; фиксируется либо оптимальный целочисленный план, либо устанавливается неразрешимость задачи.

Этот метод подразумевает решение большого количества отдельных линейных задач, что приводит к значительным затратам времени и вычислительных ресурсов.

Тем не менее, этому методу, благодаря высокой надежности отводится ведущая роль в решении задач ЦЛП.

ЦЛП является перспективным направлением в математическом программировании. Развитие технологий в сфере параллельных и облачных вычислений создает возможность решения сложных задач, требующих ранее больших затрат времени и ресурсов. Использование квантовых компьютеров, и искусственного интеллекта открывают новые возможности обработки больших данных и поиска оптимальных решений с высокой точностью и оперативностью. Актуальность исследований в области целочисленного линейного программирования обусловлена необходимостью поиска оптимальных дискретных параметров по заданному критерию в различных сферах деятельности - в экономике, торговле, логистике, медицине и др.

Решим конкретную задачу методом Гомори.

На производственной площади компании Альфа, составляющей 21 м^2 планируется установить станки двух видов. Выделенный бюджет на модернизацию производства составляет 14 млн.руб. Универсальный станок стоит 5 млн.руб., а лазерный станок – 2 млн.руб. Приобретение одного универсального станка позволяет увеличить выпуск продукции на 5 единиц, а одного лазерного станка - на 4 единицы. Известно, что для установки одного универсального станка понадобится 3 м^2, а одного лазерного – 4 м^2. Необходимо определить оптимальный набор, закупаемого оборудования, который позволит максимально увеличить выпуск продукции.

Решение.

В рамках рассматриваемой задачи предполагается, что компания приобретает x_1 универсальных станков и x_2 лазерных станков. Составим систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 21 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 \le 14 \end{cases}$$

Общее увеличение выпуска продукции составит:

$F = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$

Приведем систему ограничений к каноническому виду, введя дополнительные переменные x_3 и x_4

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 21 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 \le 14 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2 - \text{целые} \end{cases}$$

Решим систему симплекс-методом без учета требования целочисленности (табл.1)

Таблица 1.

Решение задачи линейного программирования без учёта условия целочисленности

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i/x_1
x_3	3	4	1	0	21	7
x_4	5	2	0	1	14	14/5
-F	5	4	0	0	0	
x_2	0	1	5/14	-3/14	9/2	
x_1	1	0	-1/7	2/7	1	
-F	0	0	-5/7	-4/7	-23	

Найдено оптимальное нецелочисленное решение: F_{max}=23, при плане (1; 9/2; 0; 0). Среди свободных членов находим переменную, у которой дробная часть свободного члена наибольшая $\left\{\frac{9}{2}\right\} = \frac{1}{2}$.

В общем виде это уравнение имеет вид:

$x_2 + \frac{5}{14}x_3 - \frac{3}{14}x_4 = \frac{9}{2}$

Составим новое ограничение:

$\frac{1}{2} - \frac{5}{14}x_3 - \frac{11}{14}x_4 \leq 0$

Приведем уравнение к канонической форме и свободный член перенесем в правую часть

$-\frac{5}{14}x_3 - \frac{11}{14}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$

Это уравнение присоединим к системе ограничений решенной задачи, составив новую таблицу Гаусса с дополнительным столбцом x_5, содержащую последний блок решенной задачи и новую строку, соответствующую построенному уравнению (табл.2)

Таблица 2.

Введение отсекающего ограничения и решение расширенной задачи двойственным симплекс-методом

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/x_1
x_2	0	1	5/14	-3/14	0	9/2	-21
x_1	1	0	-1/7	2/7	0	1	7/2
x_5	0	0	-5/14	-11/14	1	-1/2	7/11
-F	0	0	-5/7	-4/7	0	-23	
x_2	0	1	5/11	0	5/11	51/11	
x_1	1	0	-3/11	0	-3/11	9/11	
x_4	0	0	5/11	1	5/11	7/11	
-F	0	0	-5/11	0	-5/11	-249/11	

Найдено оптимальное нецелочисленное решение: F_{max}=249/11, при плане (9/11; 51/11; 0; 7/11).

Осуществив еще ряд отсечений аналогичным образом с целью получения целочисленного решения, получим следующие значения (табл.3).

Таблица 3.

Оптимальный целочисленный план задачи закупки производственного оборудования

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_1	1	1	0	0	1
x_2	0	1	0	0	4
x_3	0	0	1	0	2
x_4	0	0	0	1	1
-F	0	0	0	0	21

Получен оптимальный целочисленный план: F_{max}=21 при плане (1; 4; 2; 1). Оптимальной стратегией признано приобретение 1 универсального станка и 4-х лазерных станков. Это позволит компании увеличить выпуск продукции до 21 единицы.

Излишняя площадь x_3=2 м^2 и полученная экономия денежных средств, которая составила x_4=1 млн. руб. могут быть использованы для решения других производственных задач.

В условиях ограниченности производственных площадей и объема финансовых вложений реализация выбранной стратегии по увеличению мощности производства осуществляется через оптимальное перераспределение производственных ресурсов.

Заключение

Проведённое исследование позволяет сделать вывод о том, что целочисленное линейное программирование является эффективным инструментом решения практических задач оптимизации в условиях дискретности переменных. Рассмотренные методы — отсекающих плоскостей Гомори и ветвей и границ — при различных вычислительных характеристиках обеспечивают получение точного оптимального целочисленного решения, что подтверждено на примере задачи оптимизации закупки производственного оборудования: оптимальный план, предусматривающий приобретение одного универсального и четырёх лазерных станков, обеспечил максимальный прирост выпуска продукции до 21 единицы при соблюдении всех ресурсных ограничений. Перспективы развития ЦЛП связаны с интеграцией методов дискретной оптимизации с технологиями параллельных и облачных вычислений, искусственного интеллекта и квантового программирования, что существенно расширит круг решаемых задач в экономике, логистике и производственном управлении.

Список литературы

1. Барабаш, С. Б. Методы принятия оптимальных решений в экономике : учебное пособие / С. Б. Барабаш. — 2-е изд. — Новосибирск : Новосибирский государственный университет экономики и управления «НИНХ», 2017. — 355 с.
2. Богданова Е.Л. Оптимизация в проектном менеджменте: линейное программирование: учебное пособие / Е.Л. Богданова, К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина. – СПб.:Университет ИТМО, 2017. – 165 с.
3. Гареева Г. А., Еремина И. И., Файзуллина А. Г. Линейное программирование. Элементы теории, алгоритмы и примеры (учебное пособие) //Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – №. 1. – С. 70-70.
4. Ефромеев, Н. М. Исследование операций. В 2 частях. Ч. 2. Элементы целочисленного программирования : учебное пособие / Н. М. Ефромеев, Е. В. Ефромеева. — Саратов : Вузовское образование, 2022. — 130 с.
5. Ковалева К. А., Куашев М. З. Целочисленное линейное программирование и его применение //Современные наука и образование: достижения и перспективы развития: сборник материалов XXX-ой международной очно-заочной научно-практической конференции, в 4 т., Том 3, 7 июня, 2023– Москва: Издательство НИЦ «Империя», 2023.–153с. – 2023. – С. 20.
6. Прокопенко, Н. Ю. Исследование операций : учебное пособие / Н. Ю. Прокопенко. — Нижний Новгород : Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2018. — 165 с.