

Марченко Владислав Вадимович,

студент, Новосибирский государственный технический университет, г.
Новосибирск

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРОГОВ
УСТОЙЧИВОСТИ ТИПОВ ДАННЫХ ПРИ ПОСТРОЕНИИ
ПОВЕРХНОСТЕЙ БЕЗЬЕ**

Аннотация

В статье исследуется влияние разрядности целочисленных типов на устойчивость вычислений биномиальных коэффициентов при построении поверхностей Безье. В программе на C++/OpenGL реализованы три варианта хранения коэффициентов: int (32 бита), long long (64 бита) и кэшированная версия на long long. Для каждого варианта приведены скриншоты корректной поверхности и поверхности с артефактами. Экспериментально установлены пороги возникновения видимых артефактов: 31 степень для int, 62 для long long, 67 для кэшированной версии.

Annotation

The article investigates the influence of integer type bit size on computational stability of binomial coefficients when constructing Bezier surfaces. A C++/OpenGL program implements three storage variants: int (32-bit), long long (64-bit), and a cached long long version. For each variant, screenshots of correct surfaces and surfaces with artifacts are provided. Experimental thresholds for visible artifacts are established: degree 31 for int, 62 for long long, and 67 for the cached version.

Ключевые слова: поверхности Безье, биномиальные коэффициенты, переполнение целочисленных типов, устойчивость вычислений, C++, OpenGL.

Keywords: Bezier surfaces, binomial coefficients, integer overflow, computational stability, C++, OpenGL.

Поверхности Безье являются одним из фундаментальных инструментов геометрического моделирования. Они широко используются в САПР, компьютерной графике и анимации [1, 2]. При увеличении степени

поверхности возникает вычислительная проблема: биномиальные коэффициенты быстро растут и перестают помещаться в стандартные целочисленные типы. На практике большинство задач использует степени 3–5 [3, 4], однако в исследовательских целях могут потребоваться более высокие степени. В статье экспериментально определяются пороги устойчивости для разных целочисленных типов.

Поверхность Безье степени n по параметру u и степени m по параметру v задаётся формулой:

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) P_{i,j},$$

где P_{ij} – контрольные точки, а $B_i^n(u)$ и $B_j^m(v)$ – полиномы Бернштейна, которые определяются следующим образом:

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i},$$

Здесь $\binom{n}{i}$ – биномиальный коэффициент, вычисляемый по формуле:

При высоких степенях n биномиальные коэффициенты достигают огромных значений. Например, $\binom{31}{15} \approx 3,0 \times 10^8$ (ещё помещается в `int`), $\binom{32}{16} \approx 6,0 \times 10^8$ (близко к пределу `int` $\approx 2,1 \times 10^9$), $\binom{32}{17} \approx 4,5 \times 10^9$ (превышает предел `int`), $\binom{63}{31} \approx 4,6 \times 10^{18}$ (близко к пределу `long long`).

Разработана программа на языке C++ с использованием OpenGL. На рисунке 1 показан общий вид программы. Для хранения биномиальных коэффициентов реализованы три варианта. Первый – INT (32 бита) на типе `int`. Второй – LONG LONG (64 бита) на типе `long long`. Третий – CACHED, кэшированная версия на `long long`. Для каждого варианта проводилась серия экспериментов: степень постепенно увеличивалась, и фиксировались степени, при которых поверхность отображается корректно и при которых начинаются артефакты.

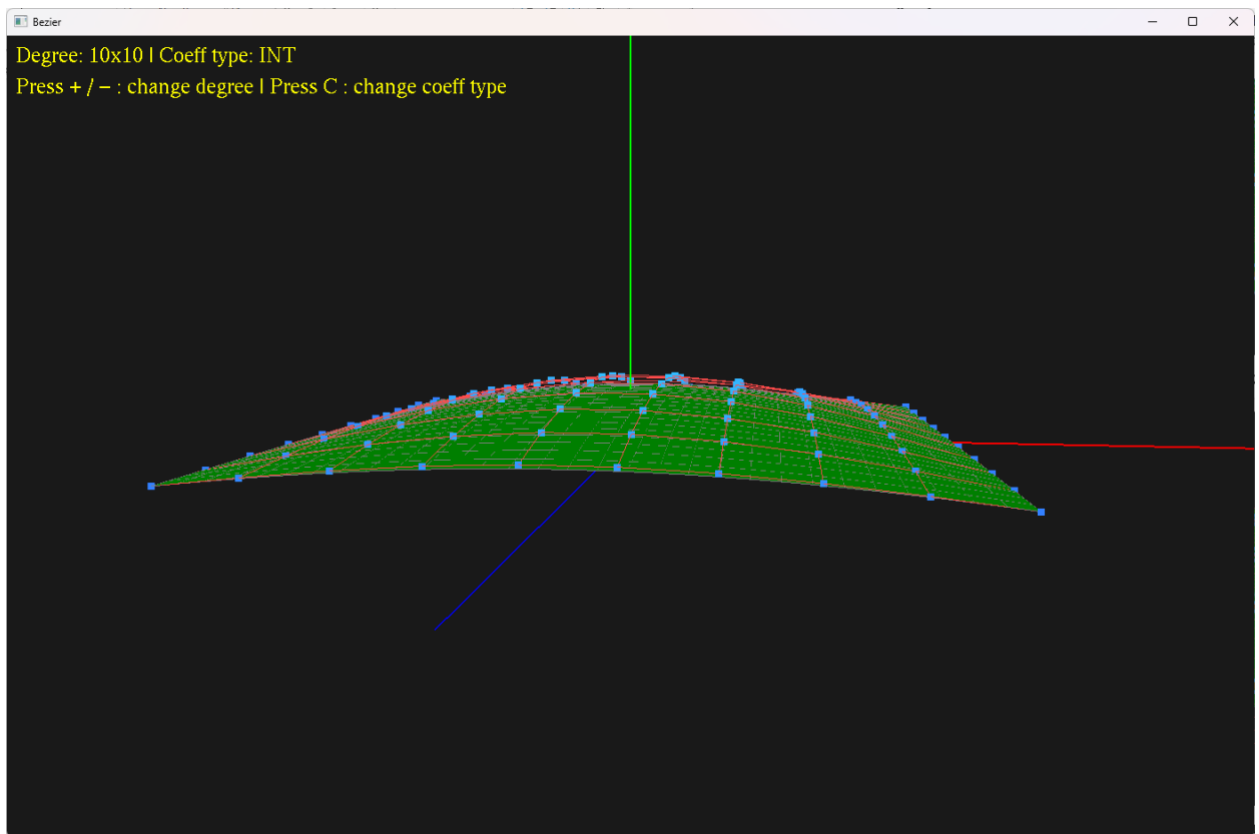


Рисунок 1 – общий вид программы.

Вариант INT (32 бита). При степени 30 поверхность отображается корректно (Рисунок 2). При степени 31 появляются артефакты (Рисунок 3).

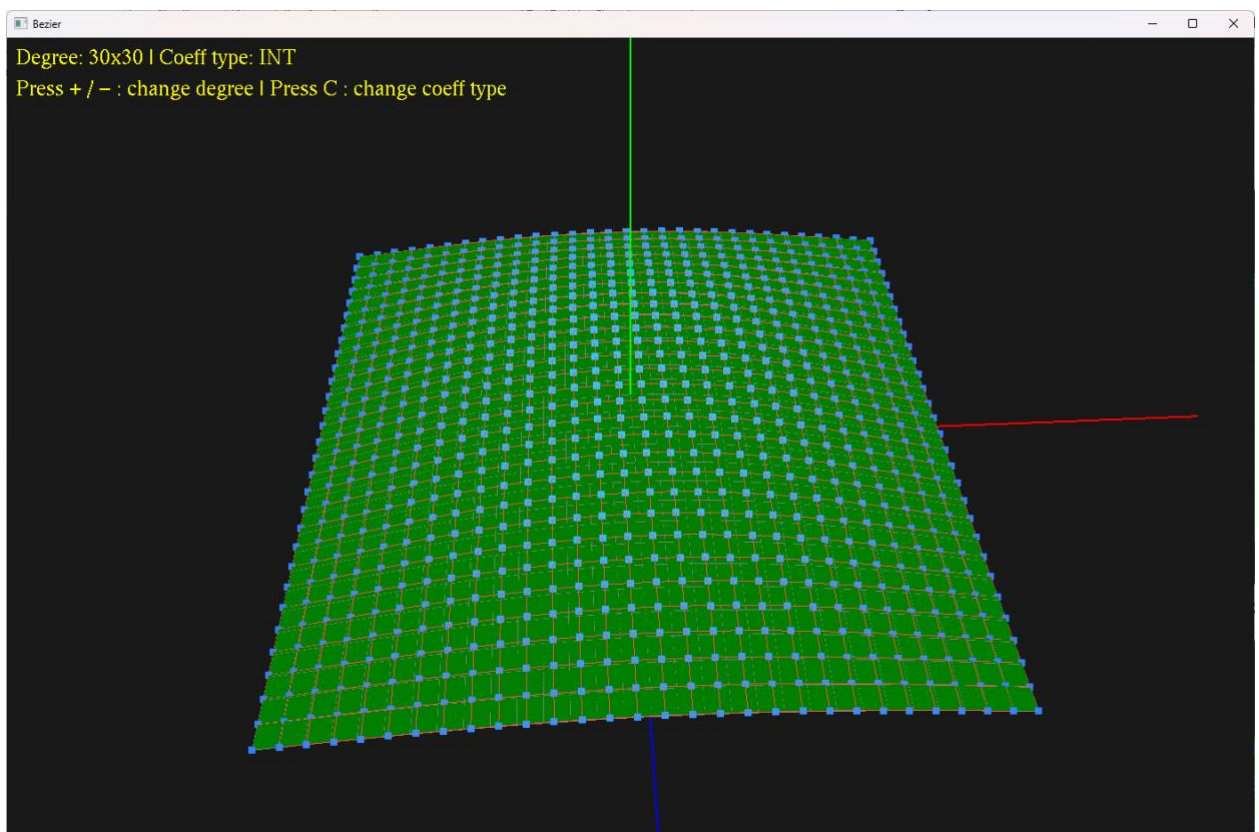


Рисунок 2 – степень 30, тип INT (корректно).

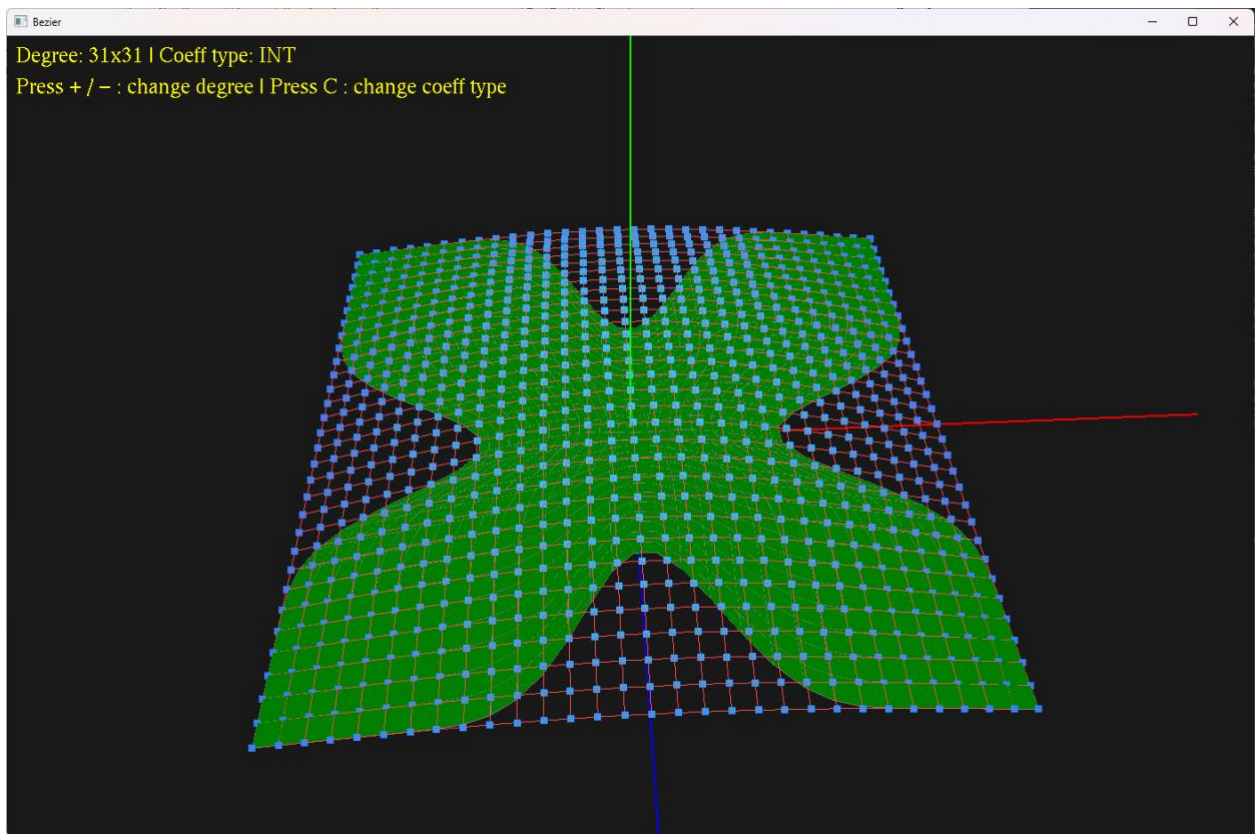


Рисунок 3 – степень 31, тип INT (артефакт «клевер»).

Вариант LONG LONG (64 бита). При степени 62 поверхность корректна (Рисунок 4). При степени 64 появляются артефакты (Рисунок 5).

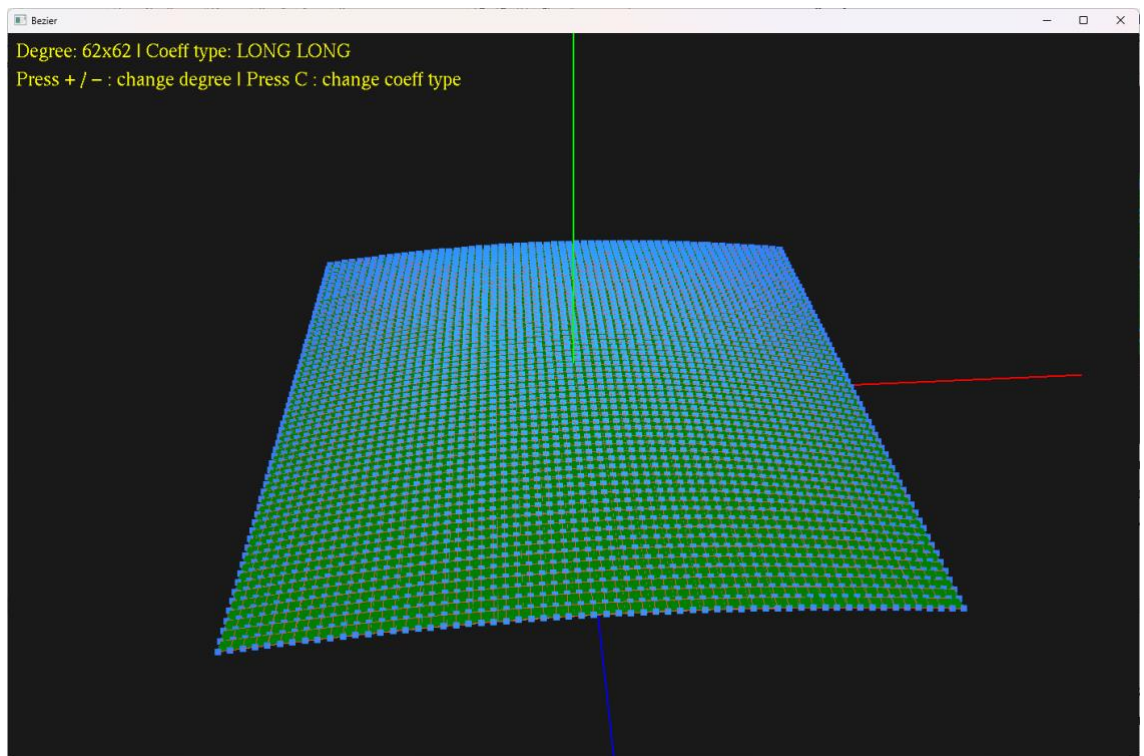


Рисунок 6 – степень 62, тип LONG LONG (корректно).

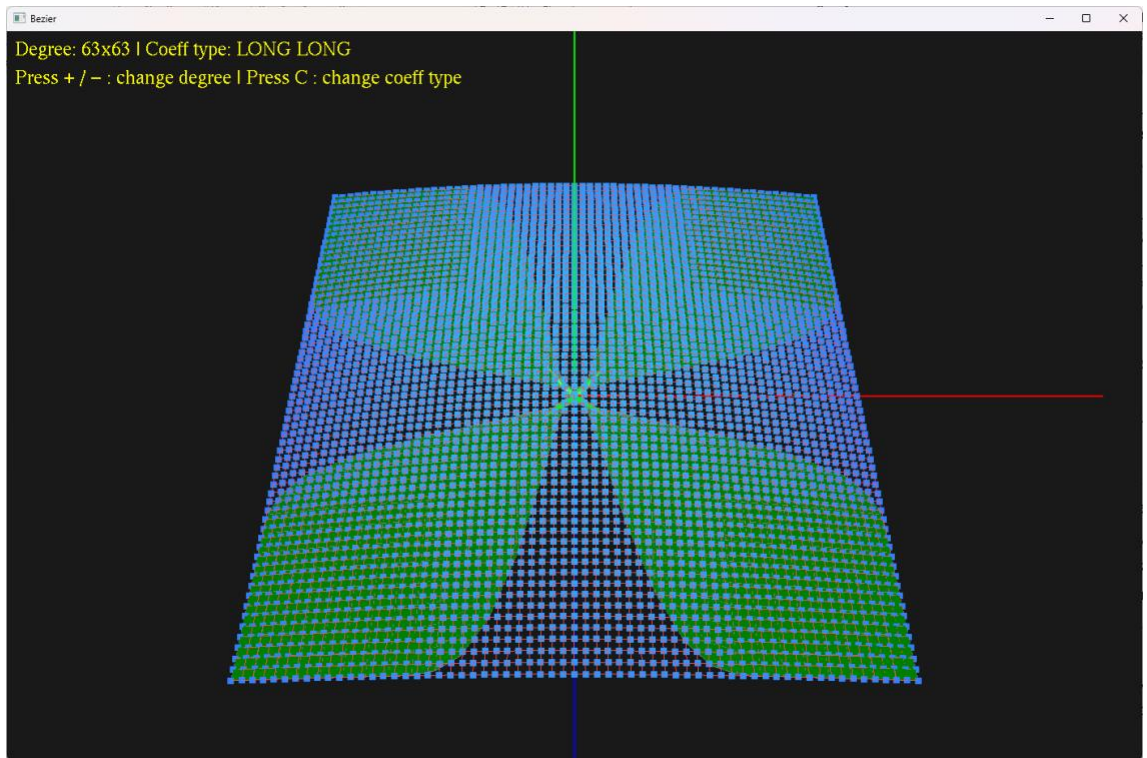


Рисунок 7 – степень 63, тип LONG LONG (артефакты «клевёр»).

Вариант CACHED (кэш на 64 бита). При степени 67 поверхность корректна (Рисунок 8). При степени 68 появляются артефакты (Рисунок 9). Кэширование позволило поднять порог всего на 5 степеней.

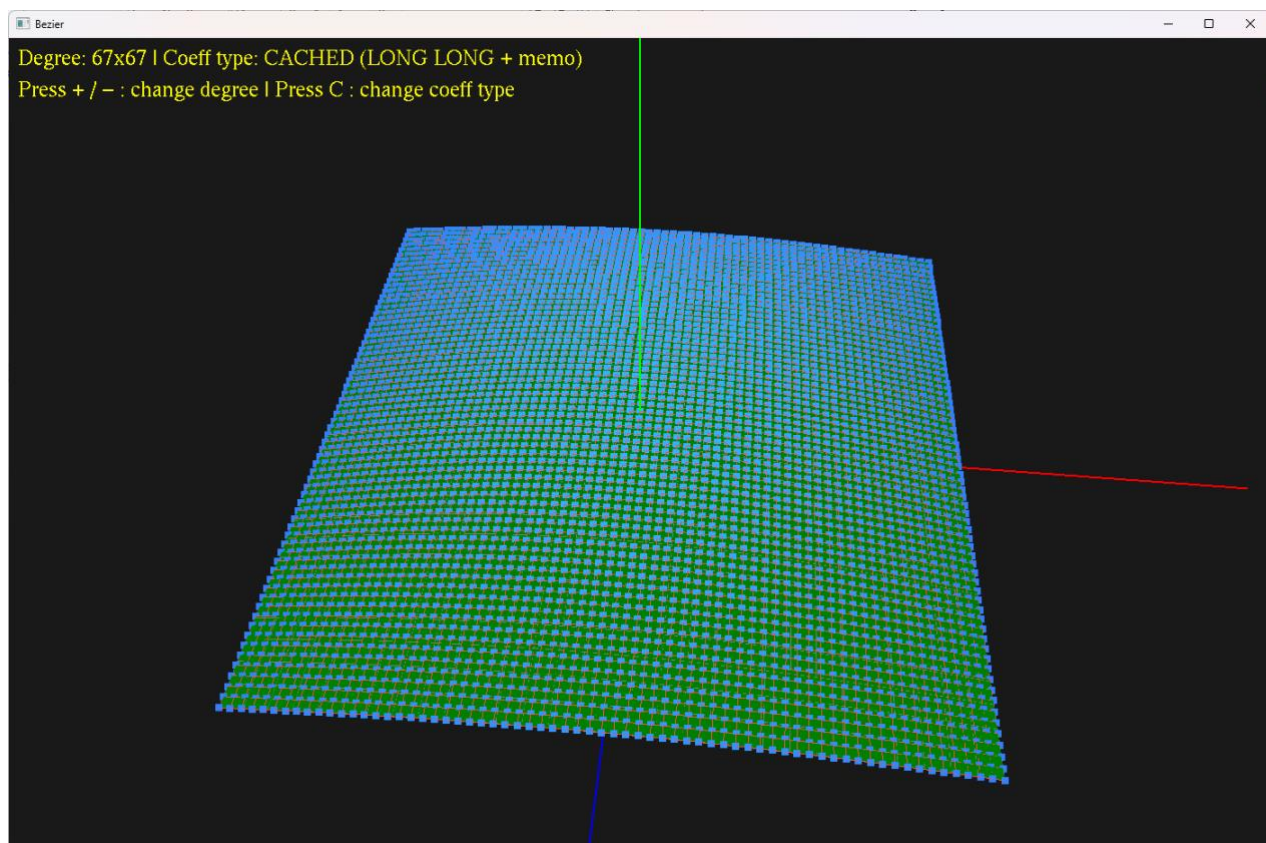


Рисунок 8 – степень 67, тип CACHED (корректно).

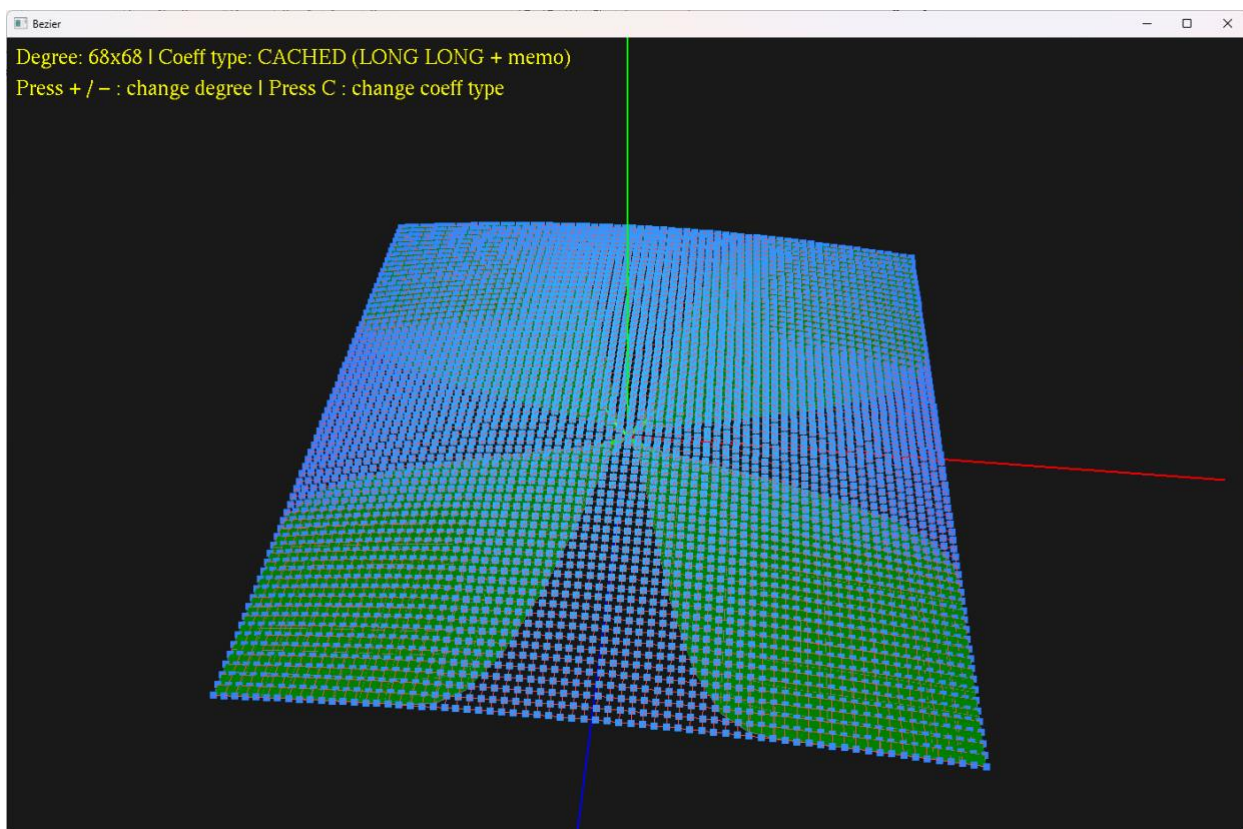


Рисунок 9 – степень 68, тип CACHED (артефакт «клевер»).

Результаты. Полученные данные сведены в таблицу.

Таблица 1 – Пороги устойчивости для разных вариантов

Вариант	Разрядность	Последняя корректная степень	Первая степень с артефактами
INT	32 бита	30	31
LONG LONG	64 бита	62	63
CACHED	64 бита + кэш	67	68

Переход с 32-битного int на 64-битный long long увеличивает порог устойчивости с 30 до 62 степени – это кардинальное улучшение. Кэширование даёт незначительный выигрыш (+5 степеней) и не является принципиальным для увеличения предельной степени. Основное преимущество кэширования – ускорение многократных пересчётов поверхности.

В ходе работы разработана программа на C++/OpenGL для визуализации поверхностей Безье с тремя способами хранения биномиальных коэффициентов. Для каждого варианта получены скриншоты корректной поверхности и поверхности с артефактами. Экспериментально установлены пороги устойчивости: int – 30/31, long long – 62/63, кэшированный long long – 67/68. Полученные результаты могут использоваться при выборе типа данных для реализации алгоритмов геометрического моделирования.

Список литературы

1. Piegl L., Tiller W. The NURBS Book. – Springer, 1997.
2. Шикин Е.В., Плис А.И. Кривые и поверхности на экране компьютера. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996.
3. Rogers D.F. An Introduction to NURBS with Historical Perspective. – Morgan Kaufmann, 2001.
4. De Boor C. A Practical Guide to Splines. – Springer, 2001.
5. Фаренкопф Р., Ляйен Д. Вычислительные аспекты геометрического моделирования // Computer Graphics Forum. – 2019. – Vol. 38, No. 2. – P. 521–536.