

Мамилова А. И.

студентка

3-й курс, факультет физико-математический

Ингушский государственный университет

Россия, г. Назрань

Мочукиева С. В.

студентка

3-й курс, факультет физико-математический

Ингушский государственный университет

Россия, г. Назрань

Научный руководитель: Албогачиева М. М.

МАТЕМАТИКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Аннотация: в статье рассматривается теория относительности так, как ее видит математика. Будут сформулированы основные понятия, такие как преобразования Лоренца, тензоры, уравнения Эйнштейна, являющиеся математическими деталями теории относительности, помогающие описать гравитацию как проявление геометрии пространства-времени, а не как взаимодействие сил.

Ключевые слова: преобразование Лоренца, тензоры, уравнения Эйнштейна, СТО, ОТО.

Abstract: The article examines the theory of relativity as mathematics sees it. Basic concepts such as Lorentz transformations, tensors, and Einstein equations will be formulated, which are mathematical details of the theory of relativity and help describe gravity as a manifestation of the geometry of space-time, rather than as an interaction of forces.

Keywords: Lorentz transformation, tensors, Einstein equations, SRT, GRT.

Математика теории относительности – это математический аппарат, описывающий, как геометрия пространства-времени связана с распределением материи и гравитационными эффектами.

Цель данной статьи – дать общее представление о математической модели теории относительности.

Актуальность темы заключается в том, что релятивистские эффекты в различных технологиях становятся все больше объектами применения, в силу чего и необходимо изучение математических деталей теории относительности. Так как теорию относительности различают как специальную, которая объясняет поведение тел при движении с очень большими скоростями, близкими к скорости света и основана на двух принципах:

1. **Принцип относительности.** Законы физики одинаковы для всех наблюдателей, которые движутся с постоянной скоростью относительно друг друга.

2. **Постоянство скорости света.** Скорость света в вакууме одинакова для всех наблюдателей, независимо от их скорости или скорости источника света.

Так и общую, которая описывает работу гравитации, связывая её с искривлением пространства-времени и базируется на следующих принципах:

1. **Эквивалентность гравитации и ускорения.** Т.е. гравитация и ускорение не отличимы при движении тела.

2. **Пространство и время искривляются под воздействием массы.** Масса способствует искривлению пространства, и замедления времени.

3. **Гравитационное замедление времени.** Часы идут медленнее вблизи массивных объектов. Например, рядом с чёрной дырой время почти останавливается.

То и математика их будет несколько отличаться.

Рассмотрим математические объекты для специальной теории относительности (СТО). Ключевую роль в СТО играют преобразования Лоренца и метрический тензор.

Преобразования Лоренца. Они описывают, как меняются координаты события (время и три пространственные координаты) при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую, которая движется относительно первой с постоянной скоростью. В реальности это напрямую объясняет такие эффекты, как замедление времени (часы в движущемся объекте идут медленнее с точки зрения неподвижного наблюдателя) и сокращение длины (объект вдоль направления движения кажется короче). Например, в экспериментах с мюонами, рождающимися в верхних слоях атмосферы, именно лоренцево замедление позволяет им долететь до поверхности Земли — без него они бы распались раньше.

Метрический тензор. В СТО он фиксирует инвариантный интервал между двумя событиями — величину, которая не зависит от системы отсчёта. Именно из инвариантности интервала следуют все релятивистские кинематические и динамические законы. Физически это означает, что пространство и время сливаются в единый континуум, и «расстояние» в нём измеряется не так, как в классической физике.

Общая теория относительности. Математический аппарат в ОТО заметно сложнее — он опирается на дифференциальную геометрию искривлённых пространств.

Метрический тензор. В ОТО он уже не фиксирован (как в СТО), а становится динамической величиной: его компоненты меняются от точки к точке, описывая кривизну пространства-времени. Физически это означает, что наличие массы и энергии (описываемых тензором энергии-импульса) искривляет пространство-время, а это искривление и есть гравитация. Например, свет, двигаясь по геодезической (кратчайшему пути в искривлённом пространстве), отклоняется вблизи массивного объекта — это и есть

гравитационное линзирование, которое многократно подтверждено наблюдениями.

Тензоры кривизны (тензор Римана, тензор Риччи, скалярная кривизна). Они количественно описывают, насколько и как именно пространство-время искривлено. Например, тензор Риччи показывает, как меняется объём малого параллелепипеда при его параллельном переносе по контуру — это прямое следствие кривизны.

Уравнения Эйнштейна. Это связка математики и физики: слева стоят геометрические объекты (тензор Риччи, скалярная кривизна, метрика), описывающие кривизну, а справа — тензор энергии-импульса, описывающий распределение материи и энергии. Решая эти уравнения, физики находят конкретную метрику (то есть картину искривления) для заданной ситуации — например, для сферически симметричного тела (решение Шварцшильда, описывающее чёрную дыру) или для расширяющейся Вселенной. Т.е. получают метрику, которая говорит: «В этой точке пространства-времени время течёт так, а расстояния измеряются так».

Геодезические. В искривлённом пространстве-времени тела движутся по геодезическим линиям. В ОТО это даёт новое понимание движения под действием гравитации: тело просто следует по «наикратчайшему» пути в искривлённом континууме, а не притягивается силой в ньютоновском смысле.

СТО работает с плоским, но «релятивистским» пространством-временем и описывает, как движение и электромагнитные взаимодействия выглядят в разных инерциальных системах. ОТО же добавляет к этому идею, что само пространство-время может быть искривлено материей, и строит на этом теорию гравитации.

Картина теории относительности, описанная с помощью математики.

Сначала нужно принять, что пространство и время — это единый континуум, и законы физики должны быть одинаковыми для всех равномерно движущихся наблюдателей. Математика СТО (преобразования Лоренца) задаёт правила игры для плоского пространства-времени. Это база, без которой ОТО не работает. Затем расширяем принцип (Принцип эквивалентности): Эйнштейн предположил, что нахождение в гравитационном поле неотличимо от ускоренного движения. Это будет служить мостом между СТО и гравитацией.

Геометрия ОТО гласит, что гравитация — это не сила, а искривление пространства-времени, вызванное массой и энергией объекта. Связь материи и геометрии есть уравнения Эйнштейна, где слева — математика кривизны (как пространство искривлено), справа — физика материи (где и сколько массы/энергии).

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Где $R_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, представляющую собой усредненную кривизну, R - скалярная кривизна, Λ - космологическая постоянная.

Уравнения связывают их и выдают метрику — «карту» пространства-времени для данной материи.

Движение (Геодезические): используя эту метрику, можно предположить движение объектов находящихся на ней, т.к. они следуют по прямым линиям в этом искривлённом пространстве. Например, таким способом можно узнать как вращаются планеты, время течёт медленнее рядом с массивными объектами.

Локальные измерения (Тензоры): Любой наблюдатель в любой точке может измерить локальные эффекты (приливные силы, кривизну) с помощью тензорного аппарата. Благодаря принципу общей ковариантности, все наблюдатели, хоть и видят разные числа, согласятся с общей физической картиной, потому что используют одни и те же тензорные законы.

Т.о. математика теории относительности являет собой строгую логическую последовательность системы, которая дает описание различным процессам пространства-времени и движения объектов внутри него.

Список использованных источников

1. Алексеев С. О., Общая теория относительности: введение. Современное развитие и приложения. — Москва : Ленанд, 2020. — С. 75–115.
2. Вергелес С. Н., Лекции по общей теории относительности. — Москва : МФТИ, 2017. — С. 135–168.
3. Вейнберг С., Гравитация и космология: принципы и приложения общей теории относительности; перевод с английского В. М. Дубовика и Э. А. Тагирова. — Москва : Мир, 1975. — С. 160–210.
4. Димитриенко Ю. И., Тензорное исчисление. — Москва : Высшая школа, 2001. — С. 65–130.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теоретическая физика. В 10 томах. Том 2. Теория поля. — 8е изд., стереотипное. — Москва : Физматлит, 2003. — С. 15–32.
6. Позняк Э. Г., Шикин Е. В., Дифференциальная геометрия: первое знакомство.— 2е изд. — Москва : Эдиториал УРСС, 2003. — С. 90–125.
7. Уолд, Р. М. Общая теория относительности; перевод с английского. — Москва : ИКИ, 2008. — С. 30–65.