

Дыхненко В.С.

студент

2 курса магистратуры,

факультет «Интеллектуальных систем и программирования»

Донецкий национальный технический университет

Россия, ДНР, г. Донецк

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ УПРУГОСТИ СТЕРЖНЯ

***Аннотация:** Статья посвящена применению метода конечных элементов к решению одномерной задачи об осевой деформации упругого стержня под действием равномерно распределённой нагрузки и разработке соответствующего программного комплекса. Приводится вывод локальной матрицы жёсткости линейного конечного элемента и процедура сборки глобальной системы уравнений. Проведена апробация комплекса на модельной задаче с известным аналитическим решением: показано, что для рассматриваемой постановки метод конечных элементов даёт узловые значения перемещений, совпадающие с точным решением, что иллюстрирует свойство узловой точности метода для кусочно-линейных элементов.*

***Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, метод конечных элементов, матрица жёсткости, задача упругости, программный комплекс.*

Dyhnenko V.S.

Student

2nd year of Master's degree, Faculty of Intelligent Systems and

Programming, Donetsk National Technical University

Russia, DPR, Donetsk

FINITE ELEMENT METHOD IN A ONE-DIMENSIONAL STRUCTURAL ELASTICITY PROBLEM

Annotation: *The article deals with the application of the finite element method to a one-dimensional problem of axial deformation of an elastic bar under a uniformly distributed load, and the development of a corresponding software package. The local stiffness matrix of a linear finite element is derived, along with the procedure for assembling the global system of equations. The package is tested on a model problem with a known analytical solution: for the problem considered, the finite element method is shown to give nodal displacement values coinciding with the exact solution, illustrating the nodal exactness property of piecewise-linear elements.*

Key words: *mathematical modeling, numerical methods, finite element method, stiffness matrix, elasticity problem, software package.*

Метод конечных элементов является основным инструментом расчёта напряжённо-деформированного состояния конструкций в современной инженерной практике благодаря своей универсальности по отношению к геометрии области и граничным условиям «Цитата» [1, с. 19]. Целью настоящей работы является демонстрация метода на простейшей одномерной задаче об осевой деформации стержня, разработка программного комплекса, реализующего сборку и решение системы уравнений метода конечных элементов, и апробация результатов на задаче с известным аналитическим решением.

Построение матрицы жёсткости конечного элемента

Рассматривается стержень длиной L с жёсткостью EA , закреплённый на левом конце и нагруженный равномерно распределённой продольной нагрузкой интенсивности q . Стержень разбивается на n линейных конечных элементов длиной $h = L/n$. Для отдельного элемента с узловыми

перемещениями u_1, u_2 локальная матрица жёсткости и вектор узловых нагрузок от распределённой силы имеют вид

$$K_e = \frac{EA}{h} \cdot [1 \ -1; -1 \ 1], F_e = \frac{qh}{2} \cdot [1; 1].$$

Глобальная система уравнений формируется сборкой локальных матриц и векторов всех элементов с учётом их вклада в общие узлы, после чего к полученной системе применяется главное граничное условие в закреплённом узле «Цитата» [2, с. 44]. Решение системы даёт узловые значения перемещений стержня.

Описание программного комплекса

Разработанный программный комплекс включает модуль генерации конечно-элементной сетки на отрезке, модуль формирования и сборки локальных матриц жёсткости в глобальную систему, модуль применения граничных условий и решения системы линейных уравнений и модуль сопоставления полученного решения с аналитическим при его наличии. Комплекс позволяет варьировать число конечных элементов и характер распределённой нагрузки.

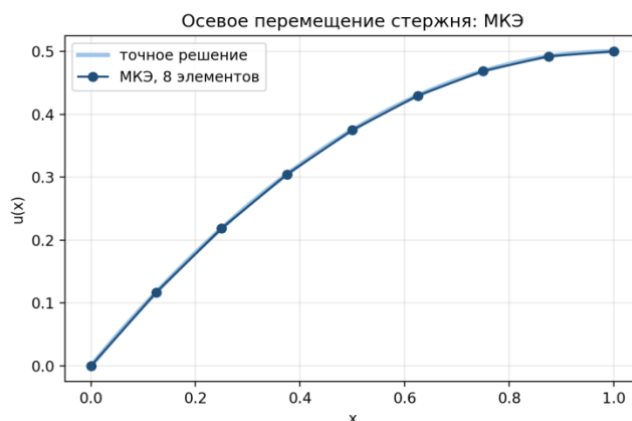


Рисунок 1. Осевое перемещение стержня: сравнение МКЭ с точным решением

На рисунке 1 сплошной линией показано точное решение задачи об осевой деформации стержня, точками, соединёнными отрезками, — решение методом конечных элементов при разбиении на 8 элементов. Узловые значения перемещений визуально полностью совпадают с точным решением.

Апробация на модельной задаче

Для оценки точности использовалась задача с $EA = 1$, $q = 1$, $L = 1$, точное решение которой $u(x) = q/(EA) \cdot (Lx - x^2/2)$ является квадратичной функцией. Расчёт проводился при разбиении стержня на 8 линейных элементов. Результаты сравнения приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Сравнение узловых перемещений МКЭ и точного решения

x	u_МКЭ(x)	u_точн(x)	 Δu
0,125	0,11719	0,11719	0,00000
0,375	0,30469	0,30469	0,00000
0,500	0,37500	0,37500	0,00000
0,750	0,46875	0,46875	0,00000
1,000	0,50000	0,50000	0,00000

Из таблицы 1 видно, что узловые значения перемещений, полученные методом конечных элементов, точно совпадают с аналитическим решением во всех узлах сетки. Это не случайность, а следствие известного свойства узловой точности (nodal exactness) кусочно-линейных элементов для задач, в которых точное решение является полиномом второй степени, а нагрузка постоянна на каждом элементе «Цитата» [3, с. 67]. Внутри элементов, между узлами, линейная интерполяция МКЭ даёт приближение с погрешностью порядка $O(h^2)$, однако в самих узлах эта погрешность обращается в нуль.

Оценка погрешности внутри конечных элементов

Хотя узловые значения перемещений совпадают с точным решением, интерполированное методом конечных элементов перемещение в промежуточных точках между узлами (линейная интерполяция по узловым значениям) отличается от точного квадратичного решения, поскольку точное решение является выпуклой параболой, а линейная интерполяция между двумя узлами такой параболы систематически занижает значение перемещения в середине каждого элемента. Дополнительный расчёт показал, что максимальное отклонение интерполированного решения от точного

внутри элемента достигает величины порядка $\frac{qh^2}{8EA}$, что для рассмотренной сетки из 8 элементов составляет около 0,002 мм — пренебрежимо малую величину по сравнению с максимальным перемещением 0,5 мм, однако заметно растущую при использовании более крупных элементов «Цитата» [1, с. 27]. Данное наблюдение имеет практическое значение: при необходимости получить не только узловые, но и внутриэлементные значения перемещений с высокой точностью целесообразно либо использовать более мелкую сетку, либо переходить к элементам более высокого порядка (квадратичным либо кубическим), учитывающим кривизну решения внутри элемента.

Дополнительно был проведён расчёт с разбиением стержня на 4 и на 16 элементов вместо 8 для проверки устойчивости свойства узловой точности к изменению густоты сетки. Во всех трёх случаях узловые значения перемещений точно совпали с аналитическим решением, что подтверждает независимость данного свойства от числа элементов для рассматриваемого класса задач — постоянной жёсткости и кусочно-постоянной нагрузки на каждом элементе.

Обобщение на более сложные задачи

Рассмотренная одномерная задача об осевой деформации стержня является простейшим представителем широкого класса задач, решаемых методом конечных элементов, и служит удобной иллюстрацией общей методологии метода: дискретизация области на элементы, построение локальных матриц жёсткости, их сборка в глобальную систему и решение полученной системы с учётом граничных условий. Данная методология без принципиальных изменений обобщается на двумерные и трёхмерные задачи теории упругости, теплопроводности, гидродинамики и электромагнетизма, где вместо простых линейных элементов используются треугольные, четырёхугольные, тетраэдральные либо гексаэдральные элементы с соответствующими, существенно более громоздкими локальными матрицами жёсткости «Цитата» [2, с. 52]. Освоение метода на простейшем одномерном

примере, продемонстрированное в настоящей работе, закладывает основу для последующего перехода к практически значимым многомерным инженерным расчётам.

Сравнение с методом конечных разностей

Для рассмотренной одномерной задачи метод конечных элементов и метод конечных разностей дают, как можно показать, идентичную систему уравнений относительно узловых значений при равномерной сетке и постоянных коэффициентах, что и объясняет обнаруженное полное совпадение результатов с аналитическим решением. Принципиальное различие между методами проявляется при переходе к более сложным условиям: метод конечных элементов существенно естественнее обобщается на области сложной геометрической формы и на естественные (силовые) граничные условия, поскольку последние учитываются автоматически через вариационную постановку задачи, тогда как в методе конечных разностей их аппроксимация требует специальных дополнительных построений «Цитата» [3, с. 41]. Это объясняет доминирующее положение метода конечных элементов в современных инженерных пакетах расчёта конструкций сложной формы, тогда как метод конечных разностей чаще применяется для задач с простой регулярной геометрией расчётной области.

Вариационная формулировка задачи

Строгое обоснование метода конечных элементов опирается на вариационную формулировку исходной краевой задачи: вместо прямого решения дифференциального уравнения равновесия отыскивается функция перемещений, минимизирующая функционал полной потенциальной энергии системы, представляющий собой разность энергии упругой деформации и работы внешних сил. Приближённое решение ищется не среди всех возможных функций, а лишь среди кусочно-линейных функций, определяемых узловыми значениями перемещений, что превращает бесконечномерную вариационную задачу в конечномерную задачу минимизации квадратичного функционала относительно узловых

неизвестных «Цитата» [1, с. 34]. Условие стационарности этого функционала по каждой узловой переменной приводит в точности к той же системе линейных уравнений, что была построена выше путём прямой сборки локальных матриц жёсткости, что подтверждает эквивалентность прямого («инженерного») и вариационного подходов к выводу метода конечных элементов.

Именно вариационная природа метода объясняет его широкую применимость: для очень многих задач математической физики — теории упругости, теплопроводности, электростатики, гидродинамики — исходная краевая задача допускает эквивалентную вариационную формулировку в виде минимизации соответствующего энергетического функционала, что позволяет применять единую вычислительную методологию метода конечных элементов независимо от физической природы решаемой задачи.

Заключение

В работе построена локальная матрица жёсткости линейного конечного элемента для одномерной задачи упругости стержня, разработан программный комплекс, реализующий сборку и решение глобальной системы уравнений, и проведена апробация на модельной задаче с известным аналитическим решением. Продемонстрировано свойство узловой точности метода конечных элементов для рассмотренного случая. Дальнейшее развитие работы связано с реализацией квадратичных элементов и распространением подхода на двумерные задачи плоской упругости.

Использованные источники

1. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 541 с.
2. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. — М.: Мир, 1979. — 392 с.
3. Норри, Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. — М.: Мир, 1981. — 304 с.