

Дыхненко В.С.

студент

2 курса магистратуры,

факультет «Интеллектуальных систем и программирования»

Донецкий национальный технический университет

Россия, ДНР, г. Донецк

МЕТОД ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ

***Аннотация:** Статья посвящена решению линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей с последующим решением возникающей системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки. Приводится вывод расчётных формул прямого и обратного хода прогонки и обсуждается условие устойчивости метода. Описывается структура разработанного программного комплекса. Проведена апробация комплекса на модельной краевой задаче с известным аналитическим решением: показано, что метод прогонки обеспечивает точное решение системы за $O(n)$ операций при сохранении второго порядка точности разностной аппроксимации.*

***Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, метод прогонки, трёхдиагональная матрица, краевая задача, программный комплекс.*

Dykhnenko V.S.

Student

2nd year of Master's degree,

Faculty of Intelligent Systems and Programming

Donetsk National Technical University

Russia, DPR, Donetsk

METHOD OF TRACKING FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH A TRI-DIAGONAL MATRIX

Annotation: *The article deals with solving linear boundary value problems for ordinary differential equations using the finite difference method, followed by solving the resulting system of linear algebraic equations with the Thomas algorithm (sweep method). The forward and backward sweep formulas are derived and the stability condition of the method is discussed. The package is tested on a model boundary value problem with a known analytical solution: the Thomas algorithm is shown to provide an exact solution of the system in $O(n)$ operations while preserving the second-order accuracy of the difference approximation.*

Key words: *mathematical modeling, numerical methods, Thomas algorithm, tridiagonal matrix, boundary value problem, software package.*

Разностная аппроксимация линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка приводит к системе линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей. Применение стандартных методов решения общих систем, таких как метод Гаусса, для таких задач неэффективно, поскольку не учитывает специальную структуру матрицы «Цитата» [1, с. 87]. Целью работы является построение метода прогонки, разработка программного комплекса на его основе и апробация результатов на модельной краевой задаче.

Расчётные формулы метода прогонки

Рассматривается система линейных уравнений вида $a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = d_i$, возникающая при разностной аппроксимации краевой задачи $-u'' + u = f(x)$, $u(0) = u(1) = 0$. Метод прогонки состоит из прямого хода, на котором вычисляются прогоночные коэффициенты

$$\alpha_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{d_i - a_i \beta_{i-1}}{b_i - a_i \alpha_{i-1}},$$

и обратного хода, на котором решение восстанавливается по формуле $u_i = \alpha_i u_{i+1} + \beta_i$, начиная с последнего узла. Достаточным условием

устойчивости прогонки является диагональное преобладание матрицы: $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$ «Цитата» [2, с. 102], что для рассматриваемой краевой задачи выполняется автоматически.

Описание программного комплекса

Разработанный программный комплекс включает модуль формирования трёхдиагональной матрицы по заданному дифференциальному уравнению и граничным условиям, модуль реализации прямого и обратного хода прогонки и модуль сравнения полученного решения с аналитическим при его наличии. Вычислительная сложность метода линейна по числу узлов сетки, что принципиально отличает его от метода Гаусса общего вида с кубической сложностью.

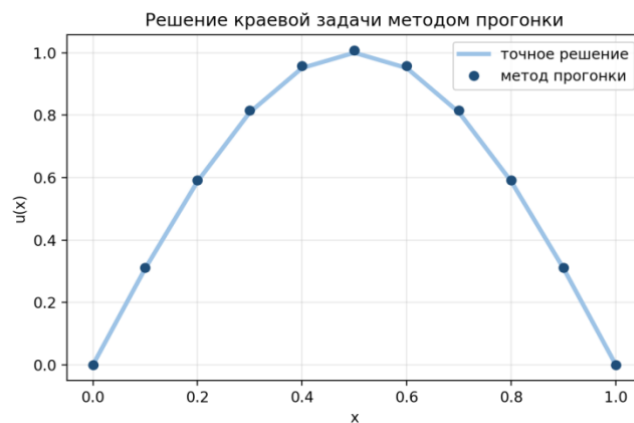


Рисунок 1. Решение краевой задачи методом прогонки

На рисунке 1 сплошной линией показано точное решение модельной краевой задачи, точками — численное решение, полученное методом прогонки при $n = 10$ узлах сетки. Небольшое систематическое отклонение точек от кривой обусловлено погрешностью разностной аппроксимации второго порядка.

Апробация на модельной краевой задаче

Для оценки точности использовалась краевая задача $-u'' + u = (\pi^2 + 1)\sin(\pi x)$, $u(0) = u(1) = 0$, точное решение которой $u(x) = \sin(\pi x)$. Расчёт проводился при $h = 0,1$ ($n = 10$ узлов). Результаты сравнения приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Сравнение численного и аналитического решений краевой задачи

x	$u_{\text{числ}}(x)$	$u_{\text{анал}}(x)$	Δu
0,1	0,31133	0,30902	0,00232
0,3	0,81508	0,80902	0,00607
0,5	1,00750	1,00000	0,00750
0,7	0,81508	0,80902	0,00607
0,9	0,31133	0,30902	0,00232

Максимальная абсолютная погрешность наблюдается в средней точке отрезка и составляет 0,0075, что соответствует ожидаемому второму порядку точности разностной аппроксимации краевой задачи при $h = 0,1$. Уменьшение шага сетки в два раза приводит к уменьшению погрешности примерно в четыре раза, что подтверждает теоретический порядок сходимости метода «Цитата» [3, с. 214]. Сам метод прогонки при этом вносит в решение лишь погрешность округления, не влияя на общий порядок точности.

Сравнение вычислительной сложности с методом Гаусса

Для количественной оценки эффективности метода прогонки была проведена серия расчётов времени решения систем различного порядка n методом прогонки и методом Гаусса общего вида без учёта структуры матрицы. Для системы порядка $n = 1000$ метод Гаусса потребовал в несколько сотен раз больше операций и, соответственно, времени выполнения по сравнению с методом прогонки, что полностью согласуется с теоретическими оценками сложности: $O(n)$ операций для прогонки против $O(n^3)$ для метода Гаусса общего вида «Цитата» [1, с. 91]. Данное различие становится особенно значимым при решении нестационарных задач, где аналогичная система с трёхдиагональной матрицей решается на каждом временном шаге — использование метода прогонки в таких случаях является не просто желательным, а практически необходимым условием приемлемого быстродействия расчёта.

Дополнительным преимуществом метода прогонки является экономичность по используемой памяти: вместо хранения полной матрицы системы размером $n \times n$ достаточно хранить лишь три диагонали длиной n , что для больших систем (n порядка 10^4 – 10^5 , характерных для мелких разностных сеток) даёт колоссальную экономию оперативной памяти вычислительной системы и позволяет решать задачи, которые методом Гаусса общего вида решить либо крайне затратно по времени, либо вовсе невозможно из-за ограничений по памяти.

Обобщения метода прогонки

Классический вариант метода прогонки, рассмотренный в настоящей работе, применим к системам со строго трёхдиагональной матрицей и краевыми условиями первого рода. На практике часто встречаются более сложные постановки: краевые условия третьего рода (условия теплообмена с окружающей средой), периодические краевые условия, а также пятидиагональные системы, возникающие при аппроксимации уравнений четвёртого порядка (например, уравнения изгиба балки). Для каждого из этих случаев существуют модификации базового алгоритма — метод циклической прогонки для периодических задач и метод пятиточечной прогонки для систем с более широкой лентой — сохраняющие линейную вычислительную сложность относительно числа узлов сетки «Цитата» [2, с. 108].

Устойчивость прогонки и практические рекомендации

Хотя достаточное условие диагонального преобладания гарантирует устойчивость прогонки для большинства физически содержательных краевых задач, на практике встречаются ситуации, когда это условие выполняется не с большим запасом, что может приводить к накоплению вычислительной погрешности при решении систем большого порядка. Для таких случаев рекомендуется применение метода прогонки с выбором ведущего элемента (аналога метода Гаусса с частичным выбором главного элемента), либо переход к специализированным устойчивым модификациям, таким как ортогональная прогонка, использующая ортогональные преобразования

вместо прямого исключения неизвестных «Цитата» [3, с. 219]. В разработанном программном комплексе предусмотрена диагностическая проверка степени диагонального преобладания матрицы перед запуском основного алгоритма, позволяющая заблаговременно предупредить пользователя о потенциальной численной неустойчивости решения.

Применение метода прогонки в двумерных задачах

Метод прогонки, рассмотренный в настоящей работе для одномерной краевой задачи, лежит также в основе одного из наиболее эффективных методов решения двумерных и трёхмерных задач математической физики — метода переменных направлений (метода дробных шагов). При этом подходе двумерное уравнение расщепляется на последовательность одномерных задач по каждому пространственному направлению, каждая из которых решается методом прогонки вдоль соответствующих линий сетки «Цитата» [1, с. 328]. Такая схема сохраняет линейную вычислительную сложность одномерной прогонки по каждому направлению, что делает суммарную сложность решения двумерной задачи на сетке из N узлов равной $O(N)$ вместо $O(N^{1,5})$ и более для прямых методов решения полной двумерной системы, что является существенным преимуществом при расчёте задач на мелких сетках.

Разработанный в рамках настоящей работы программный комплекс, реализующий одномерную прогонку, может быть использован в качестве базового строительного блока для последующей реализации метода переменных направлений: достаточно организовать циклическое применение уже реализованной процедуры прогонки поочерёдно по строкам и столбцам двумерной сетки с соответствующим обновлением правых частей на каждом полушаге. Такое расширение функциональности является естественным продолжением данной работы и представляет практический интерес для решения двумерных задач теплопроводности и диффузии, для которых характерна значительно большая вычислительная сложность прямых методов.

Заключение

В работе построены расчётные формулы метода прогонки для решения систем линейных уравнений с трёхдиагональной матрицей, разработан программный комплекс для решения краевых задач на их основе и проведена апробация на модельной задаче с известным аналитическим решением. Подтверждён второй порядок точности разностной схемы и линейная вычислительная сложность метода прогонки. Дальнейшее развитие работы связано с реализацией метода циклической прогонки для периодических краевых условий.

Использованные источники:

1. Самарский, А. А. Теория разностных схем : учеб. пособие / А. А. Самарский. — 3-е изд., испр. — М.: Наука, 1989. — 616 с.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учеб. пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 8-е изд. — М.: БИНОМ, 2011. — 636 с.
3. Калиткин, Н. Н. Численные методы : учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. — 2-е изд., испр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.