

УДК 517.9

Научный руководитель: Албогачиева Мадина Магометовна

Физико-математический факультет

ФГБОУ ВО «Ингушский государственный университет»

Оздоев Ахмед А. Оздоев Али М.

студенты 3-го курса специальности, «Математика»,

физико-математического факультета

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА

***Аннотация:** В статье рассматривается преобразование Лежандра как один из важных математических инструментов, применяемых в анализе, механике, термодинамике и теории оптимизации. Исследованы основные свойства преобразования Лежандра, приведены его математическое определение и геометрическая интерпретация. Особое внимание уделено использованию данного преобразования в классической механике при переходе от лагранжева описания системы к гамильтонову, а также в задачах выпуклого анализа и экономико-математического моделирования. Проведенный анализ показывает, что преобразование Лежандра играет важную роль в исследовании сложных математических моделей и обеспечивает удобный способ перехода между различными формами представления функций.*

***Ключевые слова:** преобразование Лежандра, выпуклые функции, гамильтонова механика, лагранжиан, математический анализ, оптимизация, термодинамика, математическое моделирование.*

***Scientific supervisor:** Albogachieva Madina Magometovna*

Faculty of Physics and Mathematics

FGBOU VO "Ingush State University"

Ozdoyev Akhmed A. Ozdoyev Ali M.

3rd year students of the specialty, "Mathematics",

Faculty of Physics and Mathematics

Legendre transformation

Abstract: The article discusses the Legendre transformation as one of the important mathematical tools used in analysis, mechanics, thermodynamics, and optimization theory. The main properties of the Legendre transformation are investigated, and its mathematical definition and geometric interpretation are provided. Special attention is given to the use of this transformation in classical mechanics when transitioning from the Lagrangian description of a system to the Hamiltonian description, as well as in convex analysis and economic and mathematical modeling. The analysis shows that the Legendre

Keywords: Legendre transform, convex functions, Hamiltonian mechanics, Lagrangian, mathematical analysis, optimization, thermodynamics, mathematical modeling. transform plays an important role in the study of complex mathematical models and provides a convenient way to switch between different forms of function representation.

Введение

Современная математика и физика широко используют методы преобразования функций для упрощения анализа сложных процессов и явлений. Одним из таких методов является преобразование Лежандра, названное в честь французского математика Адриена-Мари Лежандра. Данный математический аппарат позволяет переходить от одной системы переменных к другой, сохраняя при этом основную информацию о рассматриваемом объекте [1]. Преобразование Лежандра нашло применение в различных областях науки. Оно используется в аналитической механике для перехода от лагранжева формализма к

гамильтонову, в термодинамике при введении термодинамических потенциалов, а также в теории оптимизации и выпуклом анализе [2]. Благодаря своей универсальности данный метод является важным элементом математического аппарата современной науки.

Цель исследования — изучить теоретические основы преобразования Лежандра, определить его основные свойства и рассмотреть практические направления применения.

Материалы и методы исследования

Теоретическую основу исследования составили труды отечественных и зарубежных ученых в области математического анализа, дифференциальных уравнений, механики и оптимизации [3].

В работе использовались следующие методы исследования:

- анализ научной литературы;
- сравнительный метод;
- математическое моделирование;
- методы дифференциального исчисления;
- методы выпуклого анализа.

Рассмотрим функцию

$$f(x)$$

Пусть функция является выпуклой и дифференцируемой. Тогда преобразование Лежандра определяется следующим образом:

$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (px - f(x))$$

где $f(p)$ - исходная функция, $f^*(p)$ - преобразованная функция, p - новая независимой переменной, а символ $\sup$ обозначает точную верхнюю грань множества значений выражения [4].

Если функция является строго выпуклой, то максимум достигается в точке, удовлетворяющей условию

$$p = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

Тогда преобразованная функция может быть записана в виде

$$f^*(p) = px - f(x)$$

Полученное выражение является основой большинства практических приложений преобразования Лежандра.

Результаты исследования

Исследование показало, что преобразование Лежандра обладает рядом важных свойств.

Во-первых, оно устанавливает взаимно однозначную связь между переменными x и p , если исходная функция является строго выпуклой [5].

Во-вторых, двойное применение преобразования позволяет восстановить исходную функцию:

$$(f^*)^* = f$$

Данное свойство называется инволютивностью преобразования Лежандра и имеет большое значение в функциональном анализе [6]. Геометрически преобразование Лежандра связано с семейством касательных к графику функции. Каждая касательная характеризуется угловым коэффициентом p , а преобразованная функция описывает зависимость между этим коэффициентом и соответствующим свободным членом уравнения касательной.

Рассмотрим пример.

Пусть

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

Тогда

$$p = f'(x) = x$$

следовательно,

$$x = p$$

Подставляя значение в формулу преобразования, получаем

$$f^*(p) = px - f(x) \Rightarrow p \cdot p - \frac{p^2}{2} \Rightarrow \frac{p^2}{2}$$

Таким образом, функция сохраняет свой вид после преобразования Лежандра.

Одним из важнейших направлений применения является аналитическая механика. В лагранжевой механике движение системы описывается функцией Лагранжа

$$L = L(q, \dot{q}, t),$$

где q — обобщенные координаты, а $\dot{q}$ — обобщенные скорости.

С помощью преобразования Лежандра вводятся обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

После этого определяется гамильтониан

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(t, q, \dot{q})$$

Полученная функция позволяет перейти к гамильтоновой форме уравнений движения, которая широко применяется в современной физике и математике [7].

В термодинамике преобразование Лежандра используется для получения различных термодинамических потенциалов. Так, из внутренней энергии системы можно получить свободную энергию Гельмгольца, энтальпию и потенциал Гиббса посредством последовательных преобразований [8]. В экономике и теории оптимизации данный метод применяется при исследовании задач максимизации прибыли, минимизации затрат и анализе двойственных задач линейного и нелинейного программирования [9].

Обсуждение результатов

Проведенный анализ показывает, что преобразование Лежандра является универсальным математическим инструментом, объединяющим различные области науки. Его важнейшее преимущество заключается в возможности перехода к более удобному набору переменных без потери информации об исследуемой системе. Использование преобразования позволяет существенно упростить математическое описание физических процессов. В механике это приводит к построению гамильтонова формализма, в термодинамике — к введению новых потенциалов, а в оптимизации — к исследованию двойственных задач. Следует отметить, что эффективность метода наиболее высока для выпуклых функций. В случае невыпуклых зависимостей возникают дополнительные сложности, связанные с существованием экстремумов и однозначностью преобразования. Тем не менее даже в таких ситуациях идеи преобразования Лежандра продолжают активно использоваться в современной математике и прикладных исследованиях.

Заключение

Преобразование Лежандра представляет собой важный раздел математического анализа, имеющий широкие практические приложения. В ходе исследования были рассмотрены основные теоретические положения данного метода, его математическое определение и ключевые свойства.

Установлено, что преобразование Лежандра позволяет эффективно переходить между различными представлениями функций, сохраняя их фундаментальные характеристики. Особое значение данный метод имеет в аналитической механике, термодинамике, выпуклом анализе и теории оптимизации.

Полученные результаты подтверждают, что преобразование Лежандра остается одним из наиболее востребованных математических инструментов современной науки и играет важную роль в построении и исследовании математических моделей различной природы.

Список использованных источников

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — СПб.: Лань, 2021. — 736 с.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: URSS, 2020. — 416 с.
3. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 2019. — 472 с.
4. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 2018. — 520 с.
5. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. — М.: МЦНМО, 2021. — 816 с.
6. Рудин У. Основы математического анализа. — М.: Мир, 2019. — 412 с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Физматлит, 2022. — 224 с.
8. Каллен Г. Термодинамика и статистическая физика. — М.: Либроком, 2020. — 432 с.
9. Бертсекас Д. Нелинейное программирование. — М.: Бином, 2019. — 768 с.