

Гончар Д.Ю.

студент

2 курса магистратуры,

факультет «Интеллектуальных систем и программирования»

Донецкий национальный технический университет

Россия, ДНР, г. Донецк

РАСЧЁТ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Аннотация: Статья посвящена расчёту критической силы потери устойчивости шарнирно опёртого сжатого стержня методом конечных разностей, сведённого к задаче на собственные значения для трёхдиагональной матрицы, и разработке соответствующего программного комплекса. Приводится классическая формула Эйлера для критической силы и её разностный аналог. Проведена апробация комплекса на модельном стержне: получены численное значение критической силы и первая форма потери устойчивости при различном числе узлов сетки, показана сходимость численного решения к точному значению Эйлера с уменьшением шага сетки.

Ключевые слова: технические науки, строительная механика, устойчивость стержня, критическая сила, задача на собственные значения, программный комплекс.

Gonchar D.Yu.

Student

2nd year of Master's degree,

Faculty of "Intelligent Systems and Programming"

Donetsk National Technical University

Russia, DPR, Donetsk

CALCULATION OF THE CRITICAL STRENGTH OF A COMPRESSED ROD BY THE FINITE DIFFERENCE METHOD

Annotation: The article deals with the calculation of the critical buckling force of a simply supported compressed column using the finite difference method, reduced to an eigenvalue problem for a tridiagonal matrix, and the development of a corresponding software package. The classical Euler formula for the critical force and its finite-difference analogue are presented. The package is tested on a model column: the numerical critical force value and the first buckling mode shape are obtained for various grid sizes, showing convergence of the numerical solution to the exact Euler value as the grid step decreases.

Key words: technical sciences, structural mechanics, column stability, critical force, eigenvalue problem, software package.

Расчёт устойчивости сжатых стержневых элементов конструкций — колонн, стоек, элементов ферм — является обязательной проверкой при проектировании, поскольку потеря устойчивости при сжимающей нагрузке, меньшей предела прочности материала, может произойти внезапно и привести к разрушению конструкции «Цитата» [1, с. 402]. Целью настоящей работы является построение разностного аналога классической задачи Эйлера об устойчивости стержня в виде задачи на собственные значения, разработка программного комплекса на её основе и апробация с оценкой сходимости численного решения.

Разностная постановка задачи об устойчивости

Классическая формула Эйлера для критической силы шарнирно опертого стержня длиной L и жёсткостью EI имеет вид

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2}.$$

Данная формула является точным решением дифференциального уравнения устойчивости $EI \cdot w'' + P \cdot w = 0$ с граничными условиями $w(0) = w(L) = 0$. Заменяя вторую производную центральной разностью на

сетке с шагом h , приходят к задаче на собственные значения для трёхдиагональной матрицы: $-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} = (Ph^2/EI) \cdot w_i$, наименьшее собственное значение которой $\lambda_{\min}$ связано с критической силой соотношением $P_{\text{кр,числ}} = \lambda_{\min} \cdot EI/h^2$ «Цитата» [2, с. 267]. Соответствующий собственный вектор задаёт первую (наинизшую) форму потери устойчивости стержня.

Описание программного комплекса

Разработанный программный комплекс включает модуль формирования трёхдиагональной матрицы разностного аналога задачи устойчивости, модуль решения задачи на собственные значения и модуль сравнения полученной критической силы и формы потери устойчивости с точным решением Эйлера при различном числе узлов сетки, с построением графика формы изгиба и оценкой относительной погрешности.

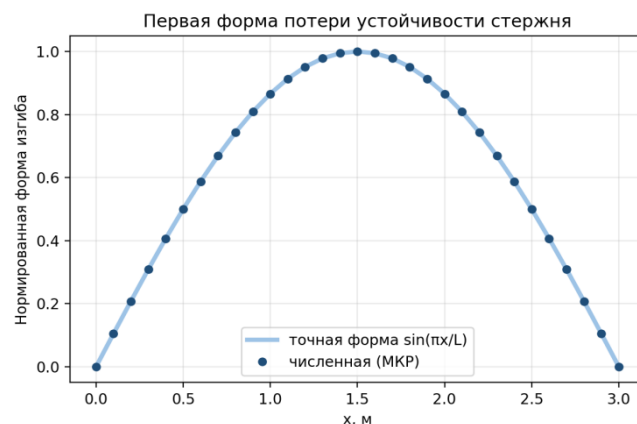


Рисунок 1. Первая форма потери устойчивости сжатого стержня

На рисунке 1 сплошной линией показана точная форма потери устойчивости $\sin(\pi x/L)$, точками — численное решение задачи на собственные значения при 30 узлах сетки. Полученная численная форма практически неотличима от точной синусоидальной формы.

Апробация и оценка сходимости

Расчёт проводился для стального стержня с жёсткостью $EI = 8 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ ($E = 200 \text{ ГПа}$, $I = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$), длиной $L = 3 \text{ м}$. Точное значение критической силы по формуле Эйлера составляет $P_{\text{кр}} = 877\,298 \text{ Н}$. Результаты

сходимости численного решения при увеличении числа узлов сетки приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Сходимость численного решения задачи устойчивости к формуле Эйлера

Число узлов n	P_кр, числ, Н	Относительная погрешность, %
5	848 813	3,247
10	870 106	0,820
20	875 496	0,205
40	876 847	0,051
80	877 185	0,013

Из таблицы 1 видно, что при увеличении числа узлов сетки вдвое относительная погрешность численного решения уменьшается примерно в четыре раза, что соответствует второму порядку точности разностной аппроксимации второй производной, использованной в задаче на собственные значения «Цитата» [3, с. 318]. Уже при 40 узлах погрешность определения критической силы не превышает 0,05%, что является более чем достаточным для инженерных расчётов устойчивости. Такая быстрая сходимость подтверждает корректность сведения задачи Эйлера к разностной задаче на собственные значения.

Влияние условий закрепления концов стержня

Рассмотренный в работе случай шарнирного опирания обоих концов стержня является лишь одним из четырёх основных случаев закрепления, для которых Эйлер вывел классические формулы критической силы, отличающиеся так называемым коэффициентом приведения длины μ : критическая сила в общем случае выражается как $P_{кр} = \pi^2 EI / (\mu L)^2$, где $\mu = 1$ для шарнирного опирания с обоих концов, $\mu = 0,5$ для стержня, защемлённого с обоих концов, $\mu = 0,7$ для стержня с одним защемлённым и одним шарнирно опёртым концом, и $\mu = 2$ для стержня, защемлённого с

одного конца и свободного с другого (консоли) «Цитата» [1, с. 405]. Разностный аналог задачи, построенный в настоящей работе для шарнирного опирания, легко обобщается на прочие случаи закрепления путём соответствующего изменения граничных условий разностной схемы — для защемлённого конца дополнительно требуется равенство нулю производной прогиба, что аппроксимируется введением фиктивного узла за пределами расчётной области.

Практическая значимость учёта условий закрепления концов трудно переоценить: критическая сила консольного стержня при прочих равных условиях в четыре раза меньше критической силы шарнирно опёртого стержня той же длины (поскольку $\mu^2 = 4$ против $\mu^2 = 1$), что делает выбор способа закрепления одним из важнейших конструктивных решений при проектировании сжатых элементов, наряду с выбором сечения и материала.

Устойчивость за пределами упругости материала

Формула Эйлера, рассмотренная в настоящей работе, справедлива лишь при условии, что критическое напряжение $\sigma_{кр} = P_{кр}/A$ не превышает предела пропорциональности материала, то есть при достаточно большой гибкости стержня $\lambda = \mu L/i$ (где i — радиус инерции сечения), превышающей некоторое предельное значение $\lambda_{пред}$, зависящее от материала «Цитата» [3, с. 411]. Для стержней малой гибкости (коротких, массивных стержней) потеря устойчивости происходит уже за пределами упругости материала, и формула Эйлера даёт завышенное, не соответствующее действительности значение критической силы. Для таких случаев применяются эмпирические формулы (например, формула Ясинского), учитывающие снижение критического напряжения при выходе материала за предел пропорциональности. Разработанный в настоящей работе программный комплекс, основанный на упругой модели устойчивости, применим в области больших и средних гибкостей; его расширение на область малых гибкостей потребует включения дополнительной проверки применимости формулы

Эйлера по значению вычисленной гибкости стержня и подключения соответствующих эмпирических зависимостей при её нарушении.

Заключение

В работе построен разностный аналог классической задачи Эйлера об устойчивости сжатого стержня в виде задачи на собственные значения для трёхдиагональной матрицы, разработан программный комплекс для её решения и проведена апробация с оценкой сходимости к точному решению Эйлера при измельчении сетки. Подтверждён второй порядок точности численного решения. Дальнейшее развитие работы связано с расширением комплекса на стержни переменного сечения и на другие виды закрепления концов стержня.

Использованные источники:

1. Тимошенко, С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С. П. Тимошенко. — М.: Наука, 1971. — 808 с.
2. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1967. — 984 с.
3. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : учебник для вузов / В. И. Феодосьев. — 10-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1999. — 592 с.