

УДК 624.072.2

Гончар Д.Ю.

студент

2 курса магистратуры,

факультет «Интеллектуальных систем и программирования»

Донецкий национальный технический университет

Россия, ДНР, г. Донецк

РАСЧЁТ ПРОГИБА ШАРНИРНО ОПЁРТОЙ БАЛКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Аннотация: Статья посвящена расчёту прогиба шарнирно опёртой балки под действием равномерно распределённой нагрузки методом конечных разностей и разработке программного комплекса, реализующего данный метод. Приводится дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и его разностная аппроксимация с решением методом прогонки. Проведена апробация комплекса путём сравнения с точным решением, известным из курса сопротивления материалов: показано, что уже при относительно грубой сетке численное решение практически совпадает с аналитическим, что подтверждает корректность реализации метода.

Ключевые слова: технические науки, строительная механика, изгиб балки, метод конечных разностей, прогиб, программный комплекс.

Gonchar D.Yu.

Student

2nd year of magistracy,

Faculty of Intelligent Systems and Programming

Donetsk National Technical University

Russia, DPR, Donetsk

CALCULATION OF THE DEFORMATION OF A PULLED BEAM BY THE FINITE DIFFERENCE METHOD

Annotation: The article deals with the deflection calculation of a simply supported beam under a uniformly distributed load using the finite difference method and the development of a software package implementing this method. The differential equation of the deflected beam axis is presented along with its difference approximation solved by the Thomas algorithm. The package is validated against the exact solution known from strength of materials: even on a relatively coarse grid, the numerical solution practically coincides with the analytical one, confirming the correctness of the method implementation.

Key words: technical sciences, structural mechanics, beam bending, finite difference method, deflection, software package.

Расчёт прогибов балочных конструкций является обязательным этапом проектирования строительных и машиностроительных конструкций, поскольку помимо условия прочности необходимо обеспечить и условие жёсткости — ограничение максимального прогиба допустимым значением «Цитата» [1, с. 244]. Для балок сложной конфигурации либо переменного сечения аналитическое интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси затруднительно, что делает актуальным применение численных методов. Целью работы является построение разностной схемы для расчёта прогиба балки, разработка программного комплекса и апробация на модельной задаче.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси и его аппроксимация

Прогиб балки $w(x)$ связан с изгибающим моментом $M(x)$ дифференциальным уравнением второго порядка

$$EI \cdot w''(x) = -M(x),$$

где EI — жёсткость сечения на изгиб. Для шарнирно опёртой балки пролётом L под равномерно распределённой нагрузкой q изгибающий

момент известен в явном виде: $M(x) = qx(L - x)/2$. Разбивая пролёт на n участков с шагом h , заменяют вторую производную центральной разностью, что приводит к системе линейных уравнений с трёхдиагональной матрицей относительно значений w_i , решаемой методом прогонки с граничными условиями $w(0) = w(L) = 0$ «Цитата» [2, с. 198].

Описание программного комплекса

Разработанный программный комплекс включает модуль вычисления изгибающего момента по длине балки для заданной схемы нагружения, модуль формирования и решения разностной системы уравнений методом прогонки и модуль сравнения полученного прогиба с аналитическим решением при его наличии, с построением совмещённого графика.

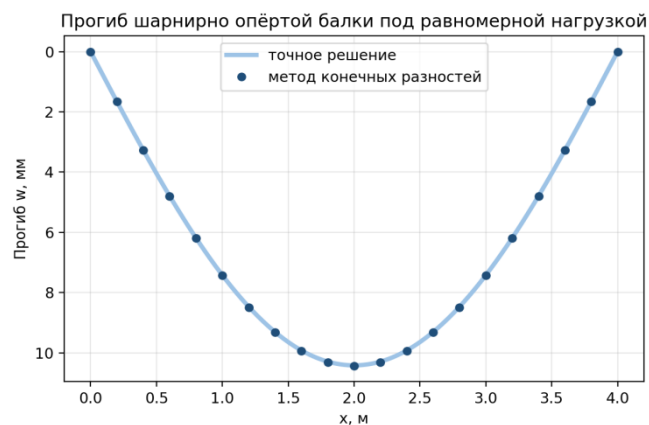


Рисунок 1. Прогиб шарнирно опёртой балки под равномерной нагрузкой

На рисунке 1 сплошной линией показано точное решение для прогиба балки, точками — численное решение методом конечных разностей при разбиении пролёта на 20 участков. Максимальный прогиб достигается в середине пролёта, что соответствует симметрии задачи.

Апробация на модельной балке

Расчёт проводился для стальной балки пролётом $L = 4$ м, жёсткостью $EI = 1,6 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ ($E = 200 \text{ ГПа}$, $I = 8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$), под равномерной нагрузкой $q = 5000 \text{ Н/м}$, на сетке из 20 участков. Точное максимальное значение прогиба в

середине пролёта составляет 10,417 мм. Результаты сравнения приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Сравнение численного и точного прогиба балки

x, м	w_числ, мм	w_точн, мм	 Δw , мм
0,80	6,2000	6,1867	0,0133
1,60	9,9400	9,9200	0,0200
2,40	9,9400	9,9200	0,0200
3,20	6,2000	6,1867	0,0133

Из таблицы 1 видно, что максимальное отклонение численного решения от точного не превышает 0,02 мм при максимальном прогибе порядка 10 мм, то есть относительная погрешность составляет менее 0,2%. Такая высокая точность на относительно грубой сетке из 20 участков объясняется тем, что для рассматриваемой нагрузки изгибающий момент является гладкой квадратичной функцией, хорошо аппроксимируемой разностной схемой второго порядка точности «Цитата» [3, с. 176]. Полученный запас точности позволяет использовать разработанный комплекс для практических инженерных расчётов без необходимости избыточного измельчения сетки.

Проверка выполнения условия жёсткости

Полученное максимальное значение прогиба необходимо сопоставить с допусковым значением, регламентированным строительными нормами. Для балок перекрытий типичное требование ограничивает прогиб величиной $L/250$ – $L/200$ пролёта, что для рассмотренного пролёта $L = 4$ м составляет 16–20 мм «Цитата» [1, с. 251]. Полученный расчётный прогиб 10,42 мм укладывается в это ограничение с запасом, что говорит о достаточной жёсткости балки при заданных параметрах нагружения и сечения. Важно отметить, что условие жёсткости в задачах строительного проектирования часто оказывается более строгим ограничением, чем условие прочности: сечение, вполне достаточное по несущей способности, может не пройти

проверку по деформациям, особенно для длиннопролётных конструкций с относительно небольшой высотой сечения.

Разработанный программный комплекс автоматически сравнивает вычисленный максимальный прогиб с допускаемым значением, вводимым пользователем в соответствии с действующими нормативными требованиями для конкретного типа конструкции, и сигнализирует о превышении допускаемой величины, что упрощает итерационный процесс подбора сечения балки на стадии эскизного проектирования.

Обобщение на другие схемы нагружения и опирания

Рассмотренная в работе схема — шарнирно опёртая балка под равномерно распределённой нагрузкой — является частным, хотя и весьма распространённым случаем. Разработанный метод конечных разностей легко обобщается на произвольную форму эпюры изгибающего момента, в том числе на сосредоточенные силы, моменты, неравномерно распределённые нагрузки и их комбинации — для этого достаточно заменить используемую в расчёте аналитическую формулу момента $M(x)$ на её значения, вычисленные для конкретной схемы нагружения, без изменения самой разностной схемы и алгоритма прогонки «Цитата» [2, с. 204]. Аналогично, изменение граничных условий (например, для консольной балки или балки с одним защемлённым и одним шарнирно опёртым концом) требует лишь корректировки граничных уравнений системы, при сохранении общей структуры трёхдиагональной матрицы для внутренних узлов сетки. Это делает разработанный программный комплекс достаточно универсальным инструментом для широкого круга задач строительной механики балочных конструкций.

Заключение

В работе построена разностная схема для расчёта прогиба шарнирно опёртой балки на основе дифференциального уравнения изогнутой оси, разработан программный комплекс, реализующий решение методом прогонки, и проведена апробация на модельной задаче с известным точным решением. Подтверждена высокая точность метода уже на относительно

грубой сетке. Дальнейшее развитие работы связано с расширением комплекса на балки переменного сечения и на другие виды опор и нагружения.

Использованные источники:

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : учебник для вузов / В. И. Феодосьев. — 10-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1999. — 592 с.
2. Дарков, А. В. Строительная механика : учебник / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. — 11-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2010. — 656 с.
3. Александров, А. В. Сопротивление материалов : учебник / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. — 5-е изд., испр. — М.: Высшая школа, 2008. — 560 с.