

Гончар Д.Ю.

студент

2 курса магистратуры,

факультет «Интеллектуальных систем и программирования»

Донецкий национальный технический университет

Россия, ДНР, г. Донецк

РАСЧЁТ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ И ДЕКРЕМЕНТА ЗАТУХАНИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация: Статья посвящена расчёту свободных затухающих колебаний механической системы с одной степенью свободы (масса-пружина-демпфер) и разработке программного комплекса, реализующего численное моделирование данного процесса. Приводится дифференциальное уравнение движения системы и аналитическая формула логарифмического декремента затухания. Проведена апробация комплекса методом сравнения численного решения, полученного методом Рунге-Кутты, с точным аналитическим решением: показано полное совпадение результатов, а также подтверждено соответствие вычисленного по амплитудам последовательных колебаний декремента затухания теоретическому значению.

Ключевые слова: технические науки, теория колебаний, собственная частота, декремент затухания, свободные колебания, программный комплекс.

Gonchar D. Yu.

Student

2nd year of magistracy,

Faculty of Intelligent Systems and Programming

Donetsk National Technical University

Russia, DPR, Donetsk

CALCULATION OF THE NATURAL FREQUENCY AND DAMPING DECREMENT OF MECHANICAL SYSTEM OSCILLATIONS

Annotation: The article deals with the calculation of free damped vibrations of a single-degree-of-freedom mechanical system (mass-spring-damper) and the development of a software package implementing numerical simulation of this process. The differential equation of system motion is presented along with the analytical formula for the logarithmic decrement. The package is validated by comparing the numerical solution obtained by the Runge-Kutta method with the exact analytical solution: full agreement is shown, and the decrement computed from successive vibration amplitudes is confirmed to match the theoretical value.

Key words: technical sciences, vibration theory, natural frequency, logarithmic decrement, free vibration, software package.

Расчёт собственных частот и характеристик затухания механических систем необходим при проектировании виброзащитных устройств и конструкций, подверженных динамическим нагрузкам, поскольку совпадение частоты внешнего воздействия с собственной частотой системы приводит к резонансу «Цитата» [1, с. 289]. Целью настоящей работы является построение модели свободных затухающих колебаний системы с одной степенью свободы, разработка программного комплекса для её численного решения и апробация с определением декремента затухания.

Математическая модель колебательной системы

Свободные колебания системы масса-пружина-демпфер описываются уравнением

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0,$$

где m — масса, k — жёсткость пружины, c — коэффициент демпфирования. Вводя $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ и коэффициент относительного демпфирования $\zeta = c/(2\sqrt{km})$, при $\zeta < 1$ решение имеет вид $x(t) = A \cdot e^{-\zeta\omega_0 t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t - \varphi)$, где $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$. Логарифмический декремент

затухания $\delta = 2\pi\zeta/\sqrt{1 - \zeta^2}$ «Цитата» [2, с. 134] может быть определён по отношению амплитуд двух последовательных колебаний: $\delta = \ln(A_n/A_{n+1})$.

Описание программного комплекса

Разработанный программный комплекс включает модуль задания параметров колебательной системы, модуль численного интегрирования уравнения движения методом Рунге-Кутты, модуль поиска локальных максимумов процесса и модуль вычисления логарифмического декремента затухания по найденным амплитудам с сравнением его с теоретическим значением.

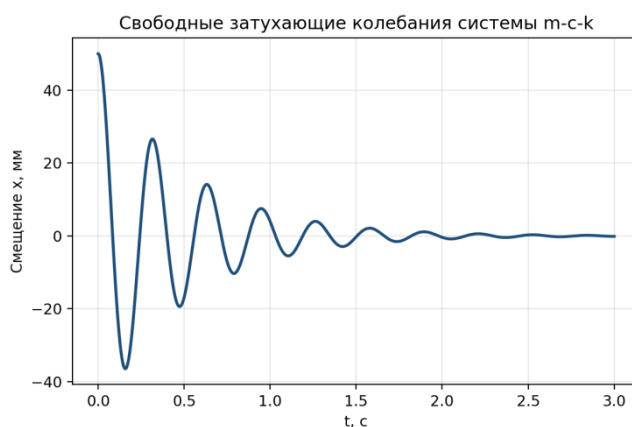


Рисунок 1. Свободные затухающие колебания механической системы

На рисунке 1 показан процесс свободных затухающих колебаний системы при начальном смещении 50 мм. Экспоненциальное уменьшение амплитуды колебаний со временем при сохранении практически постоянного периода является типичным для систем с малым демпфированием ($\zeta \ll 1$).

Апробация на модельной системе

Расчёт проводился для системы с массой $m = 2$ кг, жёсткостью пружины $k = 800$ Н/м, коэффициентом демпфирования $c = 8$ Н·с/м. Получены собственная частота $f_0 = 3,18$ Гц, коэффициент относительного демпфирования $\zeta = 0,10$, частота затухающих колебаний $\omega_d = 19,90$ рад/с. Результаты сравнения численного и аналитического решений приведены в таблице 1.

Таблица 1.

**Сравнение численного и аналитического решений для смещения
 $x(t)$**

t, с	x_числ, мм	x_анал, мм	 Δx , мм
0,2	-24,916	-24,916	0,000003
0,5	-16,843	-16,843	0,000003
1,0	3,956	3,956	0,000003
2,0	-0,383	-0,383	0,000000
3,0	-0,124	-0,124	0,000000

Из таблицы 1 видно практически полное совпадение численного и аналитического решений — расхождение не превышает $3 \cdot 10^{-6}$ мм на всём интервале, что подтверждает корректность реализации метода Рунге-Кутты. Логарифмический декремент затухания, вычисленный по амплитудам двух последовательных пиков (0,6315), практически точно совпал с теоретическим значением $2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2} = 0,6315$ «Цитата» [3, с. 98], что дополнительно подтверждает точность модели и решения.

Резонанс при вынужденных колебаниях

Хотя рассмотренная в работе задача ограничена свободными колебаниями системы после снятия начального возмущения, практическую значимость для инженерных приложений часто имеет анализ вынужденных колебаний при периодическом внешнем воздействии, особенно вблизи резонанса — совпадения частоты возбуждения с собственной частотой системы. Амплитуда установившихся вынужденных колебаний при гармоническом возбуждении силой $F_0 \cdot \cos(\omega_{\text{вын}} \cdot t)$ описывается формулой, включающей коэффициент динамичности, который при малом демпфировании ($\zeta \ll 1$) и частоте возбуждения, близкой к собственной, может достигать величины порядка $1/(2\zeta)$, то есть многократно превышать статическое отклонение под действием силы той же амплитуды «Цитата» [1, с. 312]. Для рассмотренной в работе системы с $\zeta = 0,10$ коэффициент динамичности при точном резонансе составил бы порядка 5, то есть

амплитуда вынужденных колебаний в резонансе оказалась бы в пять раз больше, чем при статическом приложении той же по величине силы — эффект, имеющий критическое значение при проектировании конструкций, подверженных периодическим нагрузкам (например, от вращающегося небалансированного оборудования).

Разработанный программный комплекс, реализующий численное интегрирование уравнения движения методом Рунге-Кутты, может быть непосредственно расширен на случай вынужденных колебаний путём добавления в правую часть уравнения движения слагаемого, описывающего внешнее возмущающее воздействие, без изменения общей архитектуры численного решателя.

Определение параметров демпфирования по экспериментальным данным

Рассмотренная в работе процедура определения логарифмического декремента затухания по отношению амплитуд двух последовательных колебаний имеет важное практическое применение как метод экспериментального определения демпфирующих свойств реальных механических систем, для которых теоретическое значение коэффициента демпфирования с часто неизвестно заранее и не поддаётся точному аналитическому расчёту. Регистрируя экспериментальную осциллограмму свободных затухающих колебаний исследуемой системы и определяя логарифмический декремент по отношению амплитуд пиков, можно найти эффективный коэффициент относительного демпфирования ζ , а через него — эквивалентный коэффициент вязкого демпфирования с системы «Цитата» [2, с. 141]. Именно такой обратный подход к идентификации параметров демпфирования широко применяется в экспериментальной механике и является естественным практическим приложением разработанного в настоящей работе математического аппарата.

Заключение

В работе построена математическая модель свободных затухающих колебаний механической системы с одной степенью свободы, разработан программный комплекс для её численного решения методом Рунге-Кутты с автоматическим определением логарифмического декремента затухания, проведена апробация на модельной системе. Подтверждено полное согласие численного решения с аналитическим и совпадение вычисленного и теоретического декрементов затухания. Дальнейшее развитие работы связано с расширением комплекса на системы с несколькими степенями свободы и на вынужденные колебания при гармоническом внешнем воздействии.

Использованные источники

1. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.
2. Бидерман, В. Л. Теория механических колебаний : учебник для вузов / В. Л. Бидерман. — М.: Высшая школа, 1980. — 408 с.
3. Пановко, Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я. Г. Пановко. — 3-е изд., доп. и перераб. — Л.: Машиностроение, 1976. — 320 с.