

Дыхненко В.С.

студент

2 курса магистратуры,

факультет «Интеллектуальных систем и программирования»

Донецкий национальный технический университет

Россия, ДНР, г. Донецк

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЬЮТОНА: АЛГОРИТМ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

***Аннотация:** Статья посвящена численному решению нелинейных уравнений методом Ньютона (методом касательных) и разработке программного комплекса, реализующего данный алгоритм. Приводится вывод итерационной формулы метода и обсуждаются условия его сходимости. Описывается структура программного комплекса, автоматически вычисляющего производную функции и контролирующего критерий остановки итерационного процесса. Проведена апробация комплекса на модельном кубическом уравнении: показано, что метод демонстрирует квадратичную сходимость, характерную для метода Ньютона вблизи простого корня.*

***Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, метод Ньютона, нелинейные уравнения, квадратичная сходимость, программный комплекс.*

Dykhnenko V.S.

Student

2nd year of Master's degree,

Faculty of Intelligent Systems and Programming

Donetsk National Technical University

Russia, DPR, Donetsk

SOLUTION OF NON-LINEAR EQUATIONS BY THE NEWTON METHOD: ALGORITHM AND PROGRAM IMPLEMENTATION

Annotation: *The article deals with the numerical solution of nonlinear equations using Newton's method (the tangent line method) and the development of a software package implementing this algorithm. The iterative formula of the method is derived and the conditions for its convergence are discussed. The package is tested on a model cubic equation: the method is shown to exhibit quadratic convergence, characteristic of Newton's method near a simple root.*

Key words: *mathematical modeling, numerical methods, Newton's method, nonlinear equations, quadratic convergence, software package.*

Решение нелинейных уравнений вида $f(x) = 0$ является одной из базовых задач вычислительной математики, возникающей при расчёте равновесных состояний технических систем, поиске корней характеристических уравнений и во многих других приложениях. Среди итерационных методов решения таких уравнений метод Ньютона выделяется высокой скоростью сходимости при удачном выборе начального приближения «Цитата» [1, с. 118]. Целью работы является построение итерационной схемы метода, разработка программного комплекса на её основе и апробация на модельном уравнении.

Итерационная схема метода Ньютона

Метод основан на линеаризации функции $f(x)$ в окрестности текущего приближения x_n с помощью касательной. Приравнивая касательную к нулю, получают итерационную формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

которая при достаточно хорошем начальном приближении и $f'(x^*) \neq 0$ в простом корне x^* обеспечивает квадратичную сходимость: число верных знаков приближённого решения удваивается на каждой итерации «Цитата» [2, с. 143]. Итерационный процесс останавливается при выполнении условия

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \text{ или } |f(x_n)| < \varepsilon,$$

где ε — заданная точность.

Описание программного комплекса

Разработанный программный комплекс включает модуль вычисления значения функции и её производной (аналитически либо численно по формуле центральной разности), модуль реализации итерационного процесса Ньютона и модуль протоколирования хода вычислений с построением графика сходимости невязки. Пользователь задаёт функцию, начальное приближение и требуемую точность; комплекс автоматически проверяет невырожденность производной на каждой итерации во избежание деления на малое число.

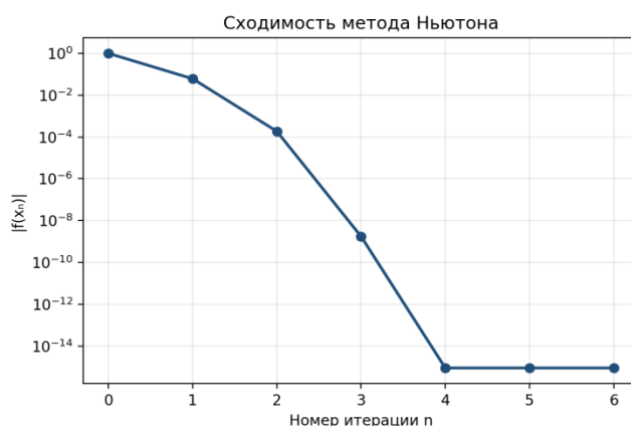


Рисунок 1. Сходимость метода Ньютона в полулогарифмическом масштабе

На рисунке 1 показано изменение модуля невязки $|f(x_n)|$ в зависимости от номера итерации для модельного уравнения. Резкое, практически вертикальное падение кривой после второй итерации наглядно иллюстрирует квадратичный характер сходимости метода Ньютона.

Апробация на модельном уравнении

Для оценки скорости сходимости использовалось уравнение $x^3 - 2x - 5 = 0$, имеющее единственный действительный корень $x^* \approx 2,0945514815$. Расчёт проводился с начальным приближением $x^0 = 2$. Результаты итерационного процесса приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Итерации метода Ньютона для уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$

n	x_n	$f(x_n)$
0	2,000000	-1,000000
1	2,100000	0,061000
2	2,094568	$1,857 \cdot 10^{-4}$
3	2,094551	$1,740 \cdot 10^{-9}$
4	2,094551	≈ 0

Из таблицы 1 видно, что уже на четвёртой итерации значение невязки достигает уровня машинного нуля. Количество верных значащих цифр приближения растёт от одной на нулевой итерации до практически полного машинного представления числа на четвёртой, что визуально подтверждает квадратичную сходимость метода. Для сравнения, методу простой итерации или методу деления отрезка пополам для достижения аналогичной точности потребовалось бы в несколько раз больше итераций «Цитата» [3, с. 176].

Влияние выбора начального приближения

Квадратичная сходимость метода Ньютона гарантируется лишь при достаточно близком к корню начальном приближении; при неудачном выборе начальной точки метод может сходиться медленно, колебаться между несколькими значениями либо расходиться. Для рассматриваемого уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$ был проведён дополнительный расчёт с начальным приближением $x^0 = 0$, находящимся значительно дальше от корня $x^* \approx 2,0946$. В этом случае для достижения той же точности потребовалось шесть итераций вместо четырёх, а на первых двух итерациях приближение существенно отклонялось от окончательного значения, прежде чем итерационный процесс попал в область квадратичной сходимости «Цитата» [1, с. 121]. Это подтверждает практическую важность разумного выбора начального приближения, например на основе предварительного грубого табулирования функции или графического анализа.

Для повышения надёжности метода в разработанном программном комплексе предусмотрена комбинированная стратегия: на первом этапе

выполняется несколько итераций более медленного, но глобально сходящегося метода деления отрезка пополам для локализации корня в достаточно узком интервале, после чего осуществляется переход к методу Ньютона для быстрого уточнения решения. Такой гибридный подход сочетает надёжность метода деления отрезка пополам с высокой скоростью сходимости метода Ньютона на завершающем этапе вычислений.

Особые случаи и ограничения метода

Отдельного рассмотрения заслуживает случай кратных корней уравнения, при которых $f'(x^*) = 0$. В этом случае классический метод Ньютона теряет квадратичную сходимость и демонстрирует лишь линейную скорость сходимости, что существенно снижает эффективность метода. Для таких случаев в вычислительной практике применяется модифицированный метод Ньютона с домножением поправки на кратность корня, восстанавливающий квадратичную сходимость при известной кратности «Цитата» [2, с. 148]. Кроме того, вблизи точек перегиба функции, где $f''(x)$ меняет знак, возможны случаи, когда касательная уводит очередное приближение далеко от искомого корня, поэтому в промышленных реализациях метода Ньютона, как правило, предусматривается ограничение на максимальный шаг итерации и резервный алгоритм на случай выхода за допустимую область значений аргумента.

Обобщение метода на системы уравнений

Идея линеаризации функции с помощью касательной, лежащая в основе метода Ньютона для одного уравнения, естественным образом обобщается на системы из n нелинейных уравнений с n неизвестными. В этом случае роль производной $f'(x)$ играет матрица Якоби системы, а итерационная формула принимает вид $x_{k+1} = x_k - J^{-1}(x_k) \cdot F(x_k)$, где $J(x_k)$ — матрица Якоби, вычисленная в текущем приближении, а F — вектор-функция левых частей системы уравнений. Практическая реализация многомерного метода Ньютона обычно избегает явного обращения матрицы Якоби, заменяя его решением

соответствующей линейной системы $J(x_k) \cdot \Delta x = -F(x_k)$ относительно поправки Δx , например методом Гаусса либо, для систем специальной структуры, методом прогонки «Цитата» [3, с. 183]. Реализация многомерного варианта метода является естественным направлением дальнейшего развития рассмотренного в настоящей работе программного комплекса.

Дополнительным практическим соображением при переходе к многомерному случаю является существенно более высокая вычислительная стоимость одной итерации: если для одного уравнения вычисление поправки требует лишь одного деления, то для системы из n уравнений необходимо решать линейную систему порядка n , что при использовании метода Гаусса общего вида требует $O(n^3)$ операций на итерацию. Это делает многомерный метод Ньютона существенно более требовательным к вычислительным ресурсам при большом числе уравнений и мотивирует применение приближённых («квазиньютоновских») методов, таких как метод Бroyдена, аппроксимирующих матрицу Якоби на основе информации о предыдущих итерациях без её прямого вычисления на каждом шаге.

Заключение

В работе построена итерационная схема метода Ньютона для решения нелинейных уравнений, разработан программный комплекс с автоматическим вычислением производной и контролем сходимости, проведена апробация на модельном кубическом уравнении. Экспериментально подтверждена квадратичная скорость сходимости метода. Дальнейшее развитие работы связано с реализацией модифицированного метода Ньютона для кратных корней и с распространением подхода на системы нелинейных уравнений.

Использованные источники:

1. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — М.: Наука, 1970. — 664 с.

2. Калиткин, Н. Н. Численные методы : учеб. пособие / Н. Н. Калиткин.
— 2-е изд., испр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.

3. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учеб. пособие / Н. С. Бахвалов,
Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 8-е изд. — М.: БИНОМ, 2011. — 636 с.