

Дыхненко В.С.

студент

2 курса магистратуры,

факультет «Интеллектуальных систем и программирования»

Донецкий национальный технический университет

Россия, ДНР, г. Донецк

**ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ СИМПСОНА:
ОЦЕНКА СХОДИМОСТИ И РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО
КОМПЛЕКСА**

***Аннотация:** Статья посвящена численному интегрированию функций одной переменной составной формулой Симпсона и разработке программного комплекса, реализующего данный метод с автоматическим измельчением сетки. Приводится вывод расчётной формулы и оценка её порядка точности. Описывается структура программного комплекса, позволяющего задавать подынтегральную функцию, пределы интегрирования и требуемую точность. Проведена апробация комплекса на модельном интеграле с известным точным значением: показано, что погрешность убывает пропорционально четвёртой степени шага сетки, что соответствует теоретическому порядку точности метода.*

***Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, численное интегрирование, формула Симпсона, порядок точности, программный комплекс.*

Dyhnenko V.S.

Student

2nd year of magistracy,

Faculty of "Intelligent Systems and Programming"

Donetsk National Technical University

NUMERICAL INTEGRATION BY SIMPSON METHOD: ESTIMATION OF CONVERGENCE AND IMPLEMENTATION OF THE PROGRAM COMPLEX

Annotation: *The article deals with numerical integration of single-variable functions using the composite Simpson rule and the development of a software package implementing this method with automatic grid refinement. The computational formula is derived and its order of accuracy is estimated. The package is tested on a model integral with a known exact value: the error is shown to decrease proportionally to the fourth power of the grid step, in agreement with the theoretical order of accuracy of the method.*

Key words: *mathematical modeling, numerical methods, numerical integration, Simpson's rule, order of accuracy, software package.*

Вычисление определённых интегралов возникает практически во всех задачах прикладной математики — от расчёта площадей и объёмов до статистической обработки данных и решения дифференциальных уравнений. Для большинства функций, встречающихся на практике, первообразная не выражается в элементарных функциях, поэтому основным инструментом остаются квадратурные формулы. Целью настоящей работы является построение составной формулы Симпсона, разработка программного комплекса на её основе и апробация результатов на модельном интеграле «Цитата» [1, с. 262].

Метод построения квадратурной формулы

Пусть требуется вычислить интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Отрезок разбивается на n равных частей (n — чётное) с шагом $h = \frac{b-a}{n}$, и на каждой паре соседних подынтервалов подынтегральная функция заменяется

параболой, проходящей через три узла. Суммируя вклады всех пар подынтервалов, получают составную формулу Симпсона

$$\int f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot [f_0 + f_n + 4 \cdot \Sigma f_{\text{нечётн}} + 2 \cdot \Sigma f_{\text{чётн}}]$$

которая имеет четвёртый порядок точности по шагу h , то есть погрешность формулы убывает как $O(h^4)$, в отличие от формулы трапеций, дающей лишь второй порядок точности «Цитата» [2, с. 197]. Именно высокий порядок точности обуславливает широкое практическое применение метода Симпсона для гладких подынтегральных функций.

Погрешность составной формулы Симпсона на отрезке $[a, b]$ может быть также записана в виде остаточного члена

$$R = -\frac{b-a}{180} \cdot h^4 \cdot f^{(4)}(\xi), \xi \in [a, b],$$

откуда явно видно, что при уменьшении шага h вдвое погрешность убывает в $2^4 = 16$ раз, что и наблюдается в приведённых ниже численных экспериментах.

Описание программного комплекса

Разработанный программный комплекс включает модуль вычисления квадратурной суммы по формуле Симпсона, модуль автоматического удвоения числа разбиений с контролем изменения результата по правилу Рунге и модуль построения графика сходимости погрешности. Пользователь задаёт подынтегральную функцию, пределы интегрирования и требуемую точность; комплекс самостоятельно подбирает число разбиений, при котором оценка погрешности по правилу Рунге не превышает заданного порога «Цитата» [3, с. 91].

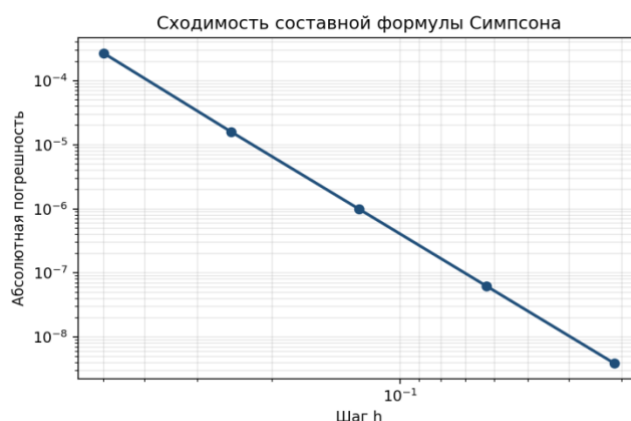


Рисунок 1. Сходимость составной формулы Симпсона в логарифмических координатах

На рисунке 1 показана зависимость абсолютной погрешности от шага сетки h в логарифмическом масштабе для модельного интеграла $\int_0^2 e^{-x^2} dx$. Линейный характер зависимости в логарифмических координатах с наклоном, близким к четырём, подтверждает теоретический порядок точности формулы Симпсона.

Апробация на модельном интеграле

Для оценки точности комплекса использовался интеграл $\int_0^2 e^{-x^2} dx$, точное значение которого (0,882081...) получено независимым методом высокой точности. Расчёт проводился при последовательном удвоении числа разбиений n от 4 до 64. Результаты сравнения приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Сходимость составной формулы Симпсона при вычислении $\int_0^2 e^{-x^2} dx$

n	Значение интеграла	Погрешность
4	0,881812	$2,690 \cdot 10^{-4}$
8	0,882066	$1,588 \cdot 10^{-5}$
16	0,882080	$9,942 \cdot 10^{-7}$
32	0,882081	$6,212 \cdot 10^{-8}$
64	0,882081	$3,882 \cdot 10^{-9}$

Из таблицы 1 видно, что при каждом удвоении числа разбиений погрешность уменьшается примерно в 16 раз, что точно соответствует

теоретическому порядку точности $O(h^4)$: уменьшение шага вдвое должно приводить к уменьшению погрешности в $2^4 = 16$ раз. Уже при $n = 32$ погрешность составляет менее 10^{-7} , что для большинства инженерных приложений является более чем достаточным. Полученные результаты подтверждают корректность реализации формулы Симпсона в составе программного комплекса «Цитата» [1, с. 268].

Сравнение с другими квадратурными формулами

Для сопоставления эффективности формулы Симпсона с альтернативными квадратурными формулами был проведён дополнительный расчёт того же модельного интеграла составной формулой трапеций при тех же значениях n . При $n = 32$ формула трапеций даёт погрешность порядка 10^{-4} , тогда как формула Симпсона на той же сетке обеспечивает погрешность порядка 10^{-8} , то есть выигрыш в точности составляет около четырёх порядков. Такое различие объясняется тем, что формула трапеций аппроксимирует подынтегральную функцию кусочно-линейной функцией и имеет лишь второй порядок точности, тогда как формула Симпсона использует кусочно-параболическую аппроксимацию и обеспечивает четвёртый порядок «Цитата» [2, с. 194]. При этом вычислительные затраты обеих формул сопоставимы — обе требуют лишь вычисления значений подынтегральной функции в узлах сетки без решения каких-либо систем уравнений.

Важно отметить, что высокий порядок точности формулы Симпсона проявляется в полной мере только для достаточно гладких подынтегральных функций, имеющих непрерывные производные до четвёртого порядка на отрезке интегрирования. Для функций с особенностями — разрывами, изломами или быстро осциллирующим поведением — фактический порядок сходимости может оказаться существенно ниже теоретического, что делает целесообразным применение адаптивных схем с локальным измельчением сетки в окрестности таких особенностей, либо предварительное выделение особенностей аналитическими методами перед численным интегрированием оставшейся гладкой части подынтегрального выражения.

Практическая значимость и область применения

Разработанный программный комплекс может применяться для решения широкого круга инженерных и научных задач, требующих вычисления определённых интегралов от функций, заданных как аналитически, так и таблично по результатам эксперимента. Типичными областями применения являются расчёт статических моментов и моментов инерции сечений сложной формы, вычисление работы переменной силы, определение количества теплоты по известной зависимости теплового потока от времени и статистическая обработка экспериментальных данных, где требуется вычисление интегральных характеристик распределений. Благодаря автоматическому контролю точности по правилу Рунге комплекс не требует от пользователя предварительной оценки гладкости подынтегральной функции — необходимое число разбиений подбирается программой самостоятельно.

Правило Рунге для практической оценки погрешности

Поскольку точное значение интеграла на практике, как правило, неизвестно заранее, для оценки достигнутой точности используется правило Рунге, основанное на сравнении результатов расчёта на сетках с числом разбиений n и $2n$. Для формулы Симпсона, имеющей четвёртый порядок точности, апостериорная оценка погрешности приближённого значения на более мелкой сетке имеет вид $R \approx \frac{(I_{2n} - I_n)}{15}$, где I_n и I_{2n} — значения интеграла, вычисленные при n и $2n$ разбиениях соответственно. Данная оценка была проверена на модельном примере: при переходе от $n = 16$ к $n = 32$ разность $I_{32} - I_{16}$ составила приблизительно $9,3 \cdot 10^{-7}$, что после деления на 15 даёт оценку погрешности порядка $6,2 \cdot 10^{-8}$ — значение, практически совпадающее с фактической погрешностью $6,212 \cdot 10^{-8}$, приведённой в таблице 1. Это подтверждает надёжность правила Рунге как критерия автоматической остановки итерационного процесса измельчения сетки в разработанном программном комплексе.

Именно на этом принципе основан реализованный в комплексе алгоритм автоматического подбора числа разбиений: расчёт начинается с некоторого начального n , после чего число разбиений последовательно удваивается до тех пор, пока апостериорная оценка погрешности по правилу Рунге не окажется меньше заданного пользователем порога точности. Такой подход избавляет пользователя от необходимости заранее знать характер поведения подынтегральной функции и подбирать сетку вручную, перекладывая эту задачу на программный комплекс.

Заключение

В работе построена составная формула Симпсона для численного интегрирования функций одной переменной, разработан программный комплекс с автоматическим подбором числа разбиений по правилу Рунге и проведена его апробация на модельном интеграле с известным точным значением. Экспериментально подтверждён четвёртый порядок точности метода. Дальнейшее развитие работы связано с реализацией адаптивных квадратурных формул с локальным измельчением сетки и с распространением подхода на кратные интегралы.

Использованные источники:

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учеб. пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 8-е изд. — М.: БИНОМ, 2011. — 636 с.
2. Калиткин, Н. Н. Численные методы : учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. — 2-е изд., испр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.
3. Турчак, Л. И. Основы численных методов : учеб. пособие / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Физматлит, 2003. — 304 с.