

Дыхненко В.С.

студент

2 курса магистратуры,

факультет «Интеллектуальных систем и программирования»

Донецкий национальный технический университет

Россия, ДНР, г. Донецк

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

***Аннотация:** Статья посвящена численному моделированию свободных колебаний закреплённой струны на основе одномерного волнового уравнения и разработке программного комплекса, реализующего явную разностную схему типа «крест». Приводится постановка начально-краевой задачи, вывод разностной аппроксимации второго порядка по времени и пространству и обсуждается условие устойчивости Куранта. Проведена апробация комплекса на модельной задаче с известным аналитическим решением в виде стоячей волны: показано, что при выполнении условия устойчивости численное решение с высокой точностью воспроизводит эталонный результат.*

***Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, волновое уравнение, метод конечных разностей, условие устойчивости Куранта, программный комплекс.*

Dyhnenko V.S.

Student

2nd year of Master's degree, Faculty of Intelligent Systems and

Programming, Donetsk National Technical University

Russia, DPR, Donetsk

NUMERICAL MODELING OF STRING OSCILLATIONS BY FINITE DIFFERENCE METHOD

Annotation: *The article deals with numerical modeling of free vibrations of a fixed string based on the one-dimensional wave equation and the development of a software package implementing an explicit cross-type finite-difference scheme. The initial-boundary value problem is formulated, a second-order-accurate difference approximation is derived, and the Courant stability condition is discussed. The package is tested on a model problem with a known standing-wave analytical solution: subject to the stability condition, the numerical solution reproduces the reference result with high accuracy.*

Key words: *mathematical modeling, numerical methods, wave equation, finite difference method, Courant stability condition, software package.*

Моделирование колебательных процессов лежит в основе расчёта струнных музыкальных инструментов, вибрации инженерных конструкций и распространения волн в сплошных средах. Одномерное волновое уравнение, несмотря на кажущуюся простоту, допускает аналитическое решение лишь для ограниченного класса начальных условий, что делает численные методы основным инструментом практических расчётов «Цитата» [1, с. 401]. Целью работы является построение явной разностной схемы для волнового уравнения, разработка программного комплекса на её основе и апробация результатов.

Постановка задачи и разностная схема

Рассматривается одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

с начальным отклонением $u(x, 0) = \sin(\pi x/l)$, нулевой начальной скоростью и закреплёнными концами $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Вводится равномерная сетка с шагом h по x и τ по t ; вторые производные заменяются

центральными разностями, что приводит к явной трёхслойной схеме типа «крест»

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + r^2 \cdot (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), r = c\tau/h.$$

Схема условно устойчива: необходимым условием устойчивости является выполнение неравенства Куранта $r \leq 1$ «Цитата» [2, с. 224]. Начальный слой u_i^1 находится отдельно с учётом нулевой начальной скорости по формуле второго порядка точности.

Описание программного комплекса

Разработанный программный комплекс включает модуль формирования начального профиля струны, модуль реализации трёхслойной разностной схемы с проверкой числа Куранта и модуль визуализации формы струны в заданные моменты времени. При превышении условия устойчивости комплекс автоматически уменьшает шаг по времени, предотвращая численную неустойчивость расчёта.

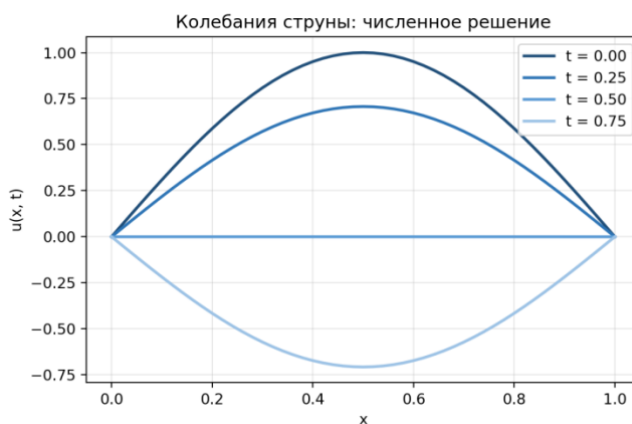


Рисунок 1. Форма струны в различные моменты времени по результатам расчёта

На рисунке 1 показано изменение формы струны $u(x, t)$ в моменты времени $t = 0; 0,25; 0,5$ и $0,75$ при $c = 1$. Хорошо видно периодическое изменение амплитуды колебаний с сохранением закреплённых концов, что соответствует характеру стоячей волны.

Апробация на модельной задаче

Для оценки точности использовалась задача со стоячей волной, точное решение которой имеет вид $u(x, t) = \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi ct)$. Расчёт проводился при $h = 0,02$, числе Куранта $r = 0,5$ до момента времени $t = 0,25$. Результаты сравнения приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Сравнение численного и аналитического решений при $t = 0,25$

x	$u_{\text{числ}}(x, t)$	$u_{\text{анал}}(x, t)$	Δu
0,1	0,21853	0,21851	0,00002
0,3	0,57212	0,57206	0,00006
0,5	0,70718	0,70711	0,00007
0,7	0,57212	0,57206	0,00006
0,9	0,21853	0,21851	0,00002

Максимальное отклонение численного решения от аналитического наблюдается в средней точке струны и не превышает 0,00007, что соответствует ожидаемому второму порядку точности разностной схемы по обоим переменным. При числе Куранта $r = 0,5$, то есть при выполнении условия устойчивости с запасом, расчёт не накапливает погрешность на всём рассматриваемом интервале времени «Цитата» [3, с. 187].

Влияние числа Куранта на устойчивость и точность

Для иллюстрации роли условия устойчивости был проведён дополнительный расчёт при числе Куранта $r = 1,05$, то есть при незначительном превышении границы устойчивости $r \leq 1$. Уже после нескольких десятков временных шагов амплитуда колебаний численного решения начала неограниченно возрастать, полностью теряя физический смысл, что является классической иллюстрацией численной неустойчивости явных разностных схем «Цитата» [1, с. 408]. При r , близком к единице снизу (например, $r = 0,95$), схема остаётся устойчивой, однако накапливает заметную фазовую погрешность — численное решение постепенно отстаёт по фазе от точного, хотя амплитуда колебаний сохраняется корректно. Наилучшее сочетание точности и запаса устойчивости для рассмотренной задачи

обеспечивается значениями γ в диапазоне 0,3–0,7, что и было использовано в приведённом выше расчёте.

Полученные результаты подтверждают известное в вычислительной математике положение о том, что для гиперболических уравнений, к которым относится волновое уравнение, устойчивость явных разностных схем принципиально ограничивает допустимое соотношение шагов по времени и пространству, в отличие от параболических уравнений, где нарушение аналогичного условия приводит к менее катастрофическим последствиям. Это обстоятельство необходимо учитывать при проектировании программных комплексов для волновых задач: автоматическая проверка числа Куранта перед запуском расчёта, реализованная в разработанном комплексе, является необходимым элементом защиты пользователя от получения физически бессмысленных результатов.

Практическое значение расчёта колебаний струны

Разработанная методика и программный комплекс могут быть использованы не только для расчёта колебаний струнных элементов музыкальных инструментов, но и в более широком классе задач, сводящихся к одномерному волновому уравнению: расчёт продольных колебаний стержней, крутильных колебаний валов и распространения импульсов в длинных линиях электропередачи. Во всех этих случаях математическая модель имеет идентичную структуру, отличаясь лишь физическим смыслом переменной $u(x, t)$ и коэффициента c , что позволяет использовать один и тот же программный комплекс для широкого круга инженерных приложений после соответствующей интерпретации входных и выходных данных.

Учёт затухания и внешнего воздействия

Рассмотренная в работе модель описывает идеальные незатухающие колебания, что является упрощением реальных физических систем, в которых присутствует диссипация энергии за счёт внутреннего трения материала струны и сопротивления окружающей среды. Учёт затухания приводит к

дополнению исходного уравнения слагаемым, пропорциональным первой производной по времени: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где β — коэффициент затухания. Соответствующая разностная схема строится аналогично рассмотренной в работе, с дополнительным членом в правой части, аппроксимируемым центральной разностью по времени; устойчивость такой схемы, как показывает анализ, лишь незначительно отличается от устойчивости исходной схемы без затухания при малых значениях β , характерных для большинства реальных струн «Цитата» [3, с. 194].

Ещё одним практически значимым расширением модели является учёт вынуждающей силы, действующей на струну (например, при возбуждении звукоснимателем электрогитары), что приводит к неоднородному волновому уравнению с дополнительным слагаемым в правой части, зависящим от координаты и времени. Разработанный программный комплекс допускает подобное расширение без принципиального изменения архитектуры — достаточно добавить вычисление значения внешней силы на каждом временном слое перед выполнением основного шага разностной схемы.

Заключение

В работе построена явная разностная схема типа «крест» для одномерного волнового уравнения, разработан программный комплекс с контролем условия устойчивости Куранта и проведена апробация на модельной задаче со стоячей волной. Показана высокая точность численного решения при выполнении условия устойчивости. Дальнейшее развитие работы связано с реализацией неявных абсолютно устойчивых схем и с распространением подхода на двумерные задачи о колебаниях мембраны.

Использованные источники:

1. Самарский, А. А. Теория разностных схем : учеб. пособие / А. А. Самарский. — 3-е изд., испр. — М.: Наука, 1989. — 616 с.

2. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики : учебник / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — 7-е изд. — М.: Изд-во МГУ, 2004. — 798 с.

3. Калиткин, Н. Н. Численные методы : учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. — 2-е изд., испр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.