

Дыхненко В.С.

студент

2 курса магистратуры, факультет «Интеллектуальных систем и

программирования»

ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет»

Россия, Донецкая Народная Республика, г. Донецк

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ:
РАЗРАБОТКА И АПРОБАЦИЯ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА**

***Аннотация:** Статья посвящена численному моделированию одномерного процесса теплопроводности методом конечных разностей и разработке программного комплекса, реализующего явную разностную схему решения соответствующего уравнения параболического типа. Приводится разностная аппроксимация дифференциального оператора, анализируется условие устойчивости явной схемы и описывается структура программного комплекса, позволяющего варьировать параметры сетки и визуализировать эволюцию температурного поля. Проведена апробация комплекса на модельной задаче с известным аналитическим решением, выполнено сравнение численных и аналитических результатов с оценкой погрешности. Показано, что при выполнении условия устойчивости разработанный комплекс обеспечивает приемлемую точность вычислений.*

***Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, метод конечных разностей, уравнение теплопроводности, устойчивость разностной схемы, программный комплекс.*

Dykhnenko V.S.

student

2nd year Master's degree, Faculty of Intelligent Systems and

Programming

Donetsk National Technical University

Donetsk, Donetsk People's Republic, Russia

**NUMERICAL SIMULATION OF THE THERMAL CONDUCTIVITY
PROCESS BY THE FINITE DIFFERENCE METHOD: DEVELOPMENT
AND TESTING OF A SOFTWARE PACKAGE**

Annotation: *The article deals with numerical modeling of a one-dimensional heat conduction process using the finite difference method and the development of a software package implementing an explicit finite-difference scheme for the corresponding parabolic equation. The stability condition of the explicit scheme is analyzed, and the structure of the software package, which allows varying grid parameters and visualizing the temperature field evolution, is described. The package is tested on a model problem with a known analytical solution; the numerical and analytical results are compared with an error estimate, showing acceptable computational accuracy subject to the stability condition.*

Key words: *mathematical modeling, numerical methods, finite difference method, heat conduction equation, scheme stability, software package.*

Задачи математического моделирования процессов теплопередачи возникают в самых разных областях инженерной практики — от проектирования теплообменного оборудования до расчёта температурных полей в строительных конструкциях. Аналитическое решение уравнения теплопроводности удаётся получить лишь для ограниченного круга простых областей, поэтому на практике доминирующую роль играют численные методы и реализующие их программные комплексы. Целью работы является построение численной схемы решения одномерного уравнения

теплопроводности методом конечных разностей, разработка программного комплекса на её основе и апробация результатов путём сравнения с точным аналитическим решением модельной задачи «Цитата» [1, с. 34].

Постановка задачи и метод решения

Рассматривается одномерное однородное уравнение теплопроводности

$$\partial u / \partial t = a \cdot \partial^2 u / \partial x^2, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

с начальным условием $u(x, 0) = \sin(\pi x / l)$ и однородными граничными условиями $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Здесь $u(x, t)$ — температура, $a > 0$ — коэффициент температуропроводности. Вводится равномерная сетка с шагом h по x и τ по t , производные заменяются конечно-разностными отношениями. Используется явная двухслойная схема

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r \cdot (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad r = a\tau/h^2,$$

имеющая первый порядок аппроксимации по времени и второй — по пространству. Явная схема условно устойчива: необходимым и достаточным условием устойчивости является неравенство $r \leq 0,5$ «Цитата» [2, с. 128]. Нарушение этого условия приводит к неограниченному росту погрешности, что используется в комплексе как встроенная проверка корректности исходных данных.

Описание программного комплекса

Разработанный программный комплекс включает три модуля: формирования расчётной сетки и начально-граничных условий; реализации разностной схемы с автоматической проверкой условия устойчивости; визуализации результатов. Перед запуском расчёта комплекс вычисляет параметр r и, если он превышает 0,5, предлагает пользователю уменьшить шаг по времени либо увеличить шаг по пространству, что исключает типичную ошибку выбора шагов сетки без учёта условия устойчивости «Цитата» [3, с. 271]. Результаты расчёта сохраняются в виде массива

значений температуры на каждом временном слое и могут быть представлены в табличной и графической форме.

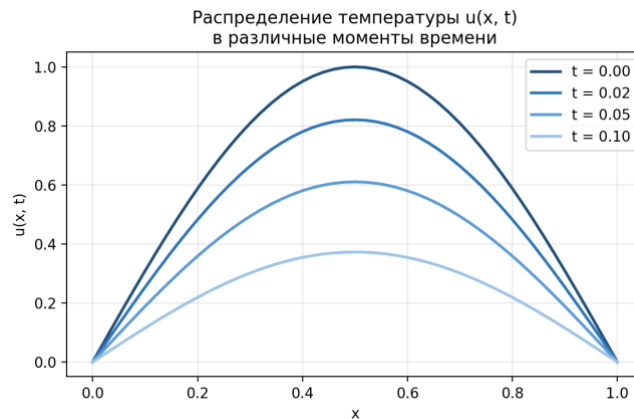


Рисунок 1. Эволюция температурного поля по результатам расчёта

На рисунке 1 показано изменение температурного профиля $u(x, t)$ при $t = 0; 0,02; 0,05$ и $0,10$. Видно монотонное убывание максимума температуры при сохранении симметричной формы профиля, что соответствует физике процесса и качественно согласуется с точным решением.

Апробация: сравнение с аналитическим решением

Для оценки точности разработанного комплекса использовалась модельная задача, для которой известно точное решение $u(x, t) = \sin(\pi x) \cdot \exp(-\pi^2 at)$. Расчёт проводился при $h = 0,1, \tau = 0,005$ ($r = 0,5$) до момента времени $T = 0,1$. Результаты сравнения численного и аналитического решений приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Сравнение численного и аналитического решений при $T = 0,1$

x	$u_{\text{числ}}(x, T)$	$u_{\text{анал}}(x, T)$	$ \Delta u $
0,1	0,11327	0,11517	0,00190
0,2	0,21545	0,21907	0,00362
0,3	0,29654	0,30153	0,00499
0,4	0,34860	0,35447	0,00586
0,5	0,36654	0,37271	0,00616
0,6	0,34860	0,35447	0,00586
0,7	0,29654	0,30153	0,00499

Максимальная абсолютная погрешность достигается в средней точке отрезка $x = 0,5$ и составляет около 0,006, что соответствует ожидаемому порядку точности схемы $O(\tau + h^2)$. Уменьшение шага h при сохранении условия устойчивости позволяет снизить погрешность практически без увеличения времени счёта, поскольку основной вклад в точность на данной сетке вносит пространственная дискретизация «Цитата» [1, с. 156]. Результаты подтверждают корректность реализации разностной схемы в составе комплекса.

Заключение

В работе построена явная разностная схема для одномерного уравнения теплопроводности, разработан программный комплекс с автоматическим контролем условия устойчивости и проведена его апробация на модельной задаче с известным аналитическим решением. Сравнение результатов показало приемлемую точность численного решения при $r \leq 0,5$. Дальнейшее развитие работы связано с реализацией неявных, абсолютно устойчивых схем и распространением подхода на двумерные и трёхмерные задачи теплопроводности.

Использованные источники

1. Самарский, А. А. Теория разностных схем : учеб. пособие / А. А. Самарский. — 3-е изд., испр. — М.: Наука, 1989. — 616 с.
2. Калиткин, Н. Н. Численные методы : учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. — 2-е изд., испр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.
3. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики : учебник / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — 7-е изд. — М.: Изд-во МГУ, 2004. — 798 с.

Информация о себе:

Телефон: +79494248834

e-mail: vlad.dyhnenko@yandex.com