

Дыхненко В.С.

студент

2 курса магистратуры,

факультет «Интеллектуальных систем и программирования»

Донецкий национальный технический университет

Россия, ДНР, г. Донецк

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ СЕТОК

***Аннотация:** Статья посвящена численному решению задачи Дирихле для двумерного уравнения Лапласа методом сеток с использованием итерационного метода Гаусса-Зейделя и разработке соответствующего программного комплекса. Приводится разностная аппроксимация оператора Лапласа и описывается итерационная процедура решения возникающей системы линейных уравнений. Проведена апробация комплекса на модельной задаче с известным аналитическим решением: показано, что итерационный процесс сходится к решению с заданной точностью, а полученное численное распределение потенциала хорошо согласуется с точным решением.*

***Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, уравнение Лапласа, задача Дирихле, метод Гаусса-Зейделя, программный комплекс.*

Dykhnenko V.S.

Student

2nd year of Master's degree, Faculty of Intelligent Systems and

Programming, Donetsk National Technical University

Russia, DPR, Donetsk

NUMERICAL SOLUTION OF THE DIRECHLE PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION BY THE NETWORK METHOD

Annotation: *The article deals with the numerical solution of the Dirichlet problem for the two-dimensional Laplace equation using the grid method with the Gauss-Seidel iterative method, and the development of a corresponding software package. A difference approximation of the Laplace operator is derived and the iterative procedure for solving the resulting system of linear equations is described. The package is tested on a model problem with a known analytical solution: the iterative process is shown to converge to the solution within the specified tolerance, and the resulting numerical potential distribution agrees well with the exact solution.*

Key words: *mathematical modeling, numerical methods, Laplace equation, Dirichlet problem, Gauss-Seidel method, software package.*

Уравнение Лапласа описывает стационарное распределение потенциала в широком круге физических задач — от электростатики до стационарной теплопроводности. Аналитическое решение задачи Дирихле известно лишь для областей простой геометрической формы, поэтому для практических расчётов применяется метод сеток в сочетании с итерационными методами решения возникающих систем линейных уравнений «Цитата» [1, с. 442]. Целью работы является построение разностной схемы и итерационной процедуры Гаусса-Зейделя, разработка программного комплекса и апробация результатов.

Разностная аппроксимация и итерационная схема

Рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в единичном квадрате с заданными граничными значениями. На равномерной сетке с шагом h оператор Лапласа аппроксимируется пятиточечным шаблоном, что приводит к разностному уравнению

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} \cdot (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}),$$

то есть значение в каждом внутреннем узле равно среднему арифметическому значений в четырёх соседних узлах. Возникающая система линейных уравнений решается итерационным методом Гаусса-Зейделя, на каждом шаге которого используются уже обновлённые на текущей итерации значения соседних узлов, что обеспечивает более быструю сходимость по сравнению с методом Якоби «Цитата» [2, с. 458].

Описание программного комплекса

Разработанный программный комплекс включает модуль формирования расчётной сетки и граничных условий, модуль итерационного уточнения решения методом Гаусса-Зейделя с контролем максимального изменения между итерациями и модуль визуализации найденного распределения потенциала в виде цветовой карты. Итерационный процесс останавливается при достижении заданной точности либо при превышении максимально допустимого числа итераций.

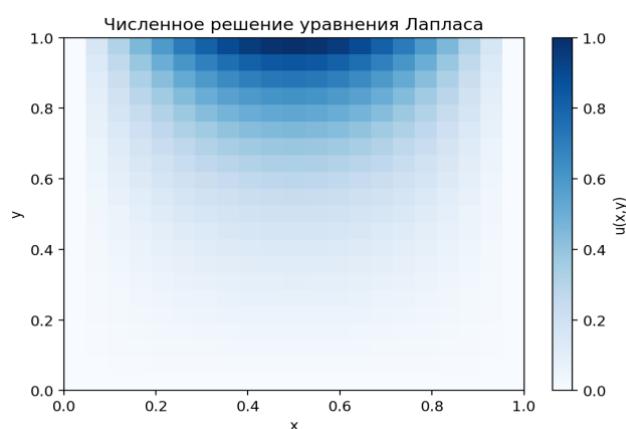


Рисунок 1. Численное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

На рисунке 1 в виде цветовой карты показано распределение потенциала $u(x, y)$ в единичном квадрате при граничном условии $u(x, 1) = \sin(\pi x)$ и нулевых значениях на остальных сторонах. Плавное убывание потенциала от верхней границы вглубь области соответствует гармоническому характеру решения уравнения Лапласа.

Апробация на модельной задаче

Для оценки точности использовалась задача с точным решением $u(x, y) = \sin(\pi x) \cdot \frac{\text{sh}(\pi y)}{\text{sh}(\pi)}$, удовлетворяющим заданным граничным условиям. Расчёт проводился на сетке 20×20 узлов методом Гаусса-Зейделя с критерием остановки по максимальному изменению 10^{-6} .

Таблица 1.

Сходимость итерационного процесса Гаусса-Зейделя

Номер итерации	Макс. изменение	Макс. погрешность
1	0,3311	—
10	0,0256	—
50	0,00294	—
100	0,00075	—
368	$9,84 \cdot 10^{-7}$	$6,81 \cdot 10^{-4}$

Из таблицы 1 видно, что итерационный процесс Гаусса-Зейделя монотонно сходится, и для достижения точности 10^{-6} на сетке 20×20 потребовалось 368 итераций. Максимальное отклонение численного решения от аналитического во внутренних узлах сетки составило $6,81 \cdot 10^{-4}$, что соответствует ожидаемому второму порядку точности пятиточечной разностной схемы по шагу сетки «Цитата» [3, с. 231]. Дальнейшее измельчение сетки позволило бы снизить эту погрешность ценой увеличения числа итераций.

Сравнение методов Якоби и Гаусса-Зейделя

Для количественного сравнения эффективности итерационных методов был проведён аналогичный расчёт методом Якоби, при котором на каждой итерации используются исключительно значения с предыдущей итерации, без немедленного обновления соседних узлов. На той же сетке 20×20 для достижения одинаковой точности 10^{-6} методу Якоби потребовалось 636 итераций против 368 у метода Гаусса-Зейделя, то есть почти в 1,7 раза больше, что согласуется с теоретической оценкой: спектральный радиус матрицы перехода метода Гаусса-Зейделя для данного класса задач примерно

вдвое меньше, чем у метода Якоби, что обеспечивает пропорционально более быструю сходимость «Цитата» [1, с. 461]. Существенным практическим преимуществом метода Якоби является лишь возможность его эффективного распараллеливания, поскольку обновление каждого узла на итерации не зависит от других узлов той же итерации, что не всегда достижимо для метода Гаусса-Зейделя без дополнительных модификаций.

Дальнейшее ускорение сходимости возможно при переходе к методу верхней релаксации (SOR — successive over-relaxation), в котором к обновлённому по формуле Гаусса-Зейделя значению добавляется поправка с настраиваемым параметром релаксации ω . При оптимальном выборе параметра ω , зависящем от спектральных свойств матрицы дискретизированной задачи, метод верхней релаксации способен обеспечить сходимость на порядок быстрее классического метода Гаусса-Зейделя «Цитата» [2, с. 469], что делает его предпочтительным выбором для практических расчётов на мелких сетках, где число итераций базовых методов становится неприемлемо большим.

Область применения разработанного комплекса

Уравнение Лапласа и родственное ему уравнение Пуассона описывают широкий круг стационарных физических полей: электростатический потенциал в отсутствие свободных зарядов, стационарное распределение температуры при отсутствии внутренних источников тепла, потенциал скорости безвихревого течения несжимаемой жидкости и функцию тока в задачах гидродинамики. Разработанный программный комплекс, изменяя лишь физическую интерпретацию решаемой величины и граничных условий, может быть непосредственно применён к любой из перечисленных задач, что делает его универсальным инструментом для широкого класса инженерных расчётов стационарных полевых задач.

Особенности сложных областей и неоднородных условий

Рассмотренная в работе задача имеет простейшую геометрию — единичный квадрат с однородной сеткой, что позволило использовать

стандартный пятиточечный шаблон без каких-либо модификаций. Для областей более сложной формы (с криволинейными границами, вырезами или составной структурой) пятиточечный шаблон вблизи границы требует специальной модификации, поскольку узлы сетки не всегда точно попадают на границу области. В таких случаях применяются методы фиктивных областей, при которых расчётная область продолжается до простой формы с искусственными граничными условиями, либо методы, учитывающие точное положение границы через интерполяцию значений в приграничных узлах «Цитата» [1, с. 449]. Реализация подобных модификаций для областей сложной формы является естественным направлением дальнейшего развития разработанного программного комплекса, актуальным при переходе от модельных задач к практическим расчётам реальных технических конструкций.

Задача Неймана и смешанные граничные условия

Помимо рассмотренной в работе задачи Дирихле, на практике часто встречается задача Неймана, в которой на границе области задаётся не значение искомой функции, а значение её нормальной производной (например, тепловой поток вместо температуры), а также смешанная задача, где на разных участках границы заданы условия разного типа. Разностная аппроксимация условия Неймана требует введения фиктивных узлов за пределами расчётной области либо использования односторонних разностных формул для производной на границе, что несколько усложняет реализацию по сравнению с прямой подстановкой значений в задаче Дирихле «Цитата» [3, с. 238]. Важной особенностью чистой задачи Неймана является то, что её решение определено лишь с точностью до произвольной постоянной, а сама система линейных уравнений оказывается вырожденной, что требует дополнительной нормировки решения (например, фиксации значения в одном произвольном узле) для получения единственного результата.

Разработанный программный комплекс в его текущей реализации ориентирован на задачу Дирихле, однако его архитектура допускает расширение на смешанные граничные условия: для этого достаточно модифицировать модуль формирования граничных условий, добавив обработку условий второго и третьего рода наряду с уже реализованными условиями первого рода, при сохранении общей итерационной схемы Гаусса-Зейделя для внутренних узлов сетки.

Заключение

В работе построена пятиточечная разностная аппроксимация уравнения Лапласа и итерационная схема Гаусса-Зейделя для решения возникающей системы линейных уравнений, разработан программный комплекс на их основе и проведена апробация на модельной задаче Дирихле с известным аналитическим решением. Подтверждена сходимость итерационного процесса и приемлемая точность разностной схемы. Дальнейшее развитие работы связано с реализацией метода верхней релаксации для ускорения сходимости.

Использованные источники:

1. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики : учебник / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — 7-е изд. — М.: Изд-во МГУ, 2004. — 798 с.
2. Самарский, А. А. Теория разностных схем : учеб. пособие / А. А. Самарский. — 3-е изд., испр. — М.: Наука, 1989. — 616 с.
3. Калиткин, Н. Н. Численные методы : учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. — 2-е изд., испр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.