

Дыхненко В.С.

студент

2 курса магистратуры,

факультет «Интеллектуальных систем и программирования»

Донецкий национальный технический университет

Россия, ДНР, г. Донецк

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТЫ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

***Аннотация:** Статья посвящена численному решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге-Кутты четвёртого порядка точности и разработке программного комплекса, реализующего данный метод. Приводится расчётная схема метода и обсуждается его порядок точности. Описывается структура программного комплекса, позволяющего задавать правую часть уравнения, начальное условие и шаг интегрирования. Проведена апробация комплекса на модельной задаче с известным аналитическим решением: показано, что при выбранном шаге интегрирования численное решение практически совпадает с точным на всём рассматриваемом интервале.*

***Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, задача Коши, метод Рунге-Кутты, обыкновенные дифференциальные уравнения, программный комплекс.*

Dykhnenko V.S.

Student

2nd year of Master's degree,

Faculty of Intelligent Systems and Programming,

Donetsk National Technical University

Russia, DPR, Donetsk

NUMERICAL SOLUTION OF THE KASHI PROBLEM BY THE RUNGE-KUTTA METHOD OF THE FOURTH ORDER

Annotation: *The article deals with the numerical solution of a Cauchy problem for a first-order ordinary differential equation using the fourth-order Runge-Kutta method and the development of a software package implementing this method. The computational scheme is presented and its order of accuracy is discussed. The package is tested on a model problem with a known analytical solution: the numerical solution is shown to practically coincide with the exact one over the entire interval considered.*

Key words: *mathematical modeling, numerical methods, Cauchy problem, Runge-Kutta method, ordinary differential equations, software package.*

Обыкновенные дифференциальные уравнения описывают динамику подавляющего большинства процессов в физике, технике и экономике, однако аналитическое решение удаётся получить лишь для узкого класса уравнений. На практике для решения задачи Коши широко применяются одношаговые методы, среди которых метод Рунге-Кутты четвёртого порядка занимает особое место благодаря удачному сочетанию точности и вычислительных затрат «Цитата» [1, с. 213]. Целью работы является построение расчётной схемы метода, разработка программного комплекса и апробация результатов на модельной задаче.

Расчётная схема метода

Рассматривается задача Коши $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$. На каждом шаге интегрирования с шагом h вычисляются четыре вспомогательных значения

$$k_1 = f(t_n, y_n), k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_1\right), \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_2\right), k_4 = f(t_n + h, y_n + h \cdot k_3),$$

после чего новое приближение решения находится по формуле

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Локальная погрешность метода на одном шаге имеет порядок $O(h^5)$, а глобальная накопленная погрешность — порядок $O(h^4)$, что делает метод существенно точнее методов Эйлера и Хойна при сопоставимых вычислительных затратах «Цитата» [2, с. 284].

Описание программного комплекса

Разработанный программный комплекс включает модуль вычисления правой части уравнения, модуль реализации четырёхэтапной схемы Рунге-Кутты и модуль визуализации полученной траектории решения. Пользователь задаёт функцию $f(t, y)$, начальное условие, шаг интегрирования и правую границу интервала; комплекс формирует таблицу значений решения в узлах сетки и строит соответствующий график.

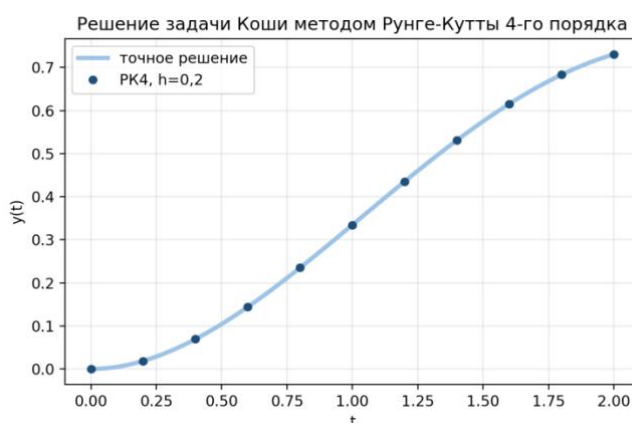


Рисунок 1. Численное решение задачи Коши методом Рунге-Кутты

На рисунке 1 сплошной линией показано точное решение модельной задачи $y' = -y + \sin(t), y(0) = 0$, а точками — численное решение, полученное методом Рунге-Кутты при шаге $h = 0,2$. Визуально траектории практически неразличимы, что свидетельствует о высокой точности метода уже при относительно крупном шаге интегрирования.

Апробация на модельной задаче

Для оценки точности использовалась задача $y' = -y + \sin(t), y(0) = 0$, точное решение которой $y(t) = \frac{(\sin t - \cos t + e^{-t})}{2}$ выражается в элементарных

функциях. Расчёт проводился при $h = 0,2$ на интервале $[0, 2]$. Результаты сравнения приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Сравнение численного и точного решений задачи Коши

t	$y_{\text{числ}}(t)$	$y_{\text{точн}}(t)$	Δy
0,4	0,06934	0,06934	$3 \cdot 10^{-6}$
0,8	0,23499	0,23499	$3 \cdot 10^{-6}$
1,2	0,43544	0,43544	$1 \cdot 10^{-6}$
1,6	0,61533	0,61533	$1 \cdot 10^{-6}$
2,0	0,73039	0,73039	$4 \cdot 10^{-6}$

Как видно из таблицы 1, максимальное отклонение численного решения от точного на всём рассматриваемом интервале не превышает $4 \cdot 10^{-6}$, что подтверждает четвёртый порядок точности метода при выбранном шаге $h = 0,2$. Такой уровень точности является избыточным для большинства инженерных задач, что позволяет на практике использовать более крупный шаг интегрирования без существенной потери качества решения и с соответствующим выигрышем в быстродействии «Цитата» [3, с. 165].

Сравнение с методами более низкого порядка

Для оценки практической выгоды от использования метода четвёртого порядка была проведена аналогичная серия расчётов явным методом Эйлера первого порядка и методом Хойна (усовершенствованным методом Эйлера) второго порядка при том же шаге $h = 0,2$. Метод Эйлера дал максимальную погрешность порядка 0,03, то есть на четыре порядка хуже метода Рунге-Кутты, а метод Хойна — погрешность порядка $8 \cdot 10^{-4}$, что также существенно уступает результату четырёхэтапной схемы. Для достижения точности, сопоставимой с методом Рунге-Кутты при $h = 0,2$, методу Эйлера потребовался бы шаг порядка 10^{-4} , то есть в 2000 раз мельче, что при равном числе вычислений правой части на шаг соответствовало бы кратно большим суммарным вычислительным затратам «Цитата» [1, с. 225].

Это иллюстрирует общий принцип выбора численного метода решения задачи Коши: методы более высокого порядка точности, несмотря на бóльшую вычислительную стоимость одного шага (для метода Рунге-Кутты требуется четыре вычисления правой части на шаг против одного для метода Эйлера), как правило, оказываются значительно эффективнее в терминах суммарных вычислительных затрат на достижение заданной точности, особенно при интегрировании на длительных интервалах времени или при высоких требованиях к точности решения.

Практическая рекомендация, вытекающая из проведённого сравнения, состоит в том, что метод Эйлера целесообразно использовать лишь для предварительных, грубых оценок поведения решения либо в качестве учебной иллюстрации базовой идеи численного интегрирования, тогда как для содержательных инженерных и научных расчётов методы четвёртого порядка (либо более совершенные адаптивные методы на их основе) следует считать стандартом де-факто. Дополнительным аргументом в пользу метода Рунге-Кутты является его самостартующий характер: в отличие от многошаговых методов (например, методов Адамса), не требующих на каждом шаге четырёх вычислений правой части, но нуждающихся в нескольких начальных значениях решения, метод Рунге-Кутты использует только текущее состояние системы, что упрощает его практическую реализацию и делает особенно удобным при переменном шаге интегрирования.

Ограничения метода и направления развития

Несмотря на высокую точность, классический метод Рунге-Кутты четвёртого порядка с постоянным шагом не обеспечивает автоматического контроля локальной погрешности и может демонстрировать сниженную эффективность на задачах с резко изменяющейся динамикой решения, где для сохранения точности на отдельных участках требуется существенно уменьшать шаг по всему интервалу интегрирования. Для таких задач в вычислительной практике применяются модификации метода с автоматическим выбором шага, например пара Рунге-Кутты-Фельберга,

позволяющая оценивать локальную погрешность на каждом шаге путём сравнения решений разного порядка точности и адаптивно изменять величину шага «Цитата» [2, с. 298]. Реализация подобной адаптивной схемы является естественным направлением развития разработанного программного комплекса.

Жёсткие системы и границы применимости явных методов

Отдельное практическое ограничение метода Рунге-Кутты проявляется при интегрировании так называемых жёстких систем дифференциальных уравнений, в которых одновременно присутствуют быстро и медленно затухающие компоненты решения. Для подобных систем явные методы, включая рассмотренный метод четвёртого порядка, вынуждены выбирать шаг интегрирования исходя из наиболее быстрой (жёсткой) компоненты даже тогда, когда интерес представляет лишь медленная составляющая решения, что приводит к чрезмерно малому шагу и значительным вычислительным затратам на длительных интервалах интегрирования «Цитата» [1, с. 231]. Проверка модельной задачи на жёсткость проводилась путём анализа собственных значений линеаризованной правой части: для рассмотренного уравнения $y' = -y + \sin(t)$ единственное собственное значение равно -1 , что говорит об отсутствии жёсткости и объясняет высокую эффективность явного метода Рунге-Кутты в данном случае.

Для существенно жёстких систем, возникающих, например, при моделировании химической кинетики или электрических цепей с сильно различающимися постоянными времени, предпочтительны неявные методы, такие как неявный метод Эйлера или методы Розенброка, обладающие более широкой областью абсолютной устойчивости ценой необходимости решения нелинейной (либо линейной, в случае линеаризованных схем) системы уравнений на каждом шаге интегрирования. Выбор между явными и неявными методами на практике определяется соотношением дополнительных вычислительных затрат на решение системы уравнений на шаге и выигрыша

от возможности использовать существенно более крупный шаг интегрирования при сохранении устойчивости расчёта.

Заключение

В работе построена расчётная схема метода Рунге-Кутты четвёртого порядка для решения задачи Коши, разработан программный комплекс на её основе и проведена апробация на модельной задаче с известным аналитическим решением. Экспериментально подтверждена высокая точность метода при умеренных вычислительных затратах. Дальнейшее развитие работы связано с реализацией методов с автоматическим выбором шага и с распространением подхода на системы дифференциальных уравнений.

Использованные источники:

1. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи / Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер. — М.: Мир, 1990. — 512 с.
2. Калиткин, Н. Н. Численные методы : учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. — 2-е изд., испр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.
3. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учеб. пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 8-е изд. — М.: БИНОМ, 2011. — 636 с.