

Митюхин Даниил Олегович

бакалавр, Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), г. Санкт-Петербург, Россия

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДАМИ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Аннотация. В статье рассматривается актуальная задача современной прикладной механики — исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) и топологическая оптимизация тяжело нагруженных деталей машин с целью снижения их массы при сохранении требуемых прочностных характеристик. Объектом исследования выступает несущий кронштейн подвески, изготовленный из алюминиевого сплава Д16Т. Оценка НДС проводилась на основе численного решения уравнений теории упругости методом конечных элементов (МКЭ). Для оптимизации геометрии применялся метод твердого изотропного материала с пенализацией (SIMP), в рамках которого решалась задача минимизации податливости (максимизации жесткости) при заданном ограничении на конечный объем детали. В результате многоитерационного процесса расчета удалось снизить массу конструкции на 45%, при этом максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу возросли с 85 МПа до 152 МПа, что остается в пределах допустимых значений (коэффициент запаса прочности более 1,8). Полученные результаты подтверждают высокую эффективность применения алгоритмов топологической оптимизации и методов прикладной механики в цикле проектирования ресурсосберегающих конструкций для авиационной, автомобильной и машиностроительной отраслей.

Annotation. The article addresses a current problem in modern applied mechanics: the investigation of the stress-strain state (SSS) and topology

optimization of heavily loaded machine parts to reduce their mass while maintaining the required strength characteristics. The object of the study is a load-bearing suspension bracket made of D16T aluminum alloy. The SSS assessment was conducted based on the numerical solution of elasticity theory equations using the finite element method (FEM). To optimize the geometry, the Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) method was applied, addressing the problem of minimizing compliance (maximizing stiffness) under a given volume constraint. As a result of the multi-iterative calculation process, the mass of the structure was reduced by 45%, while the maximum von Mises equivalent stresses increased from 85 MPa to 152 MPa, which remains well within permissible limits (the safety factor is over 1.8). The obtained results confirm the high efficiency of using topology optimization algorithms and applied mechanics methods in the design cycle of resource-saving structures for the aerospace, automotive, and mechanical engineering industries.

Ключевые слова: прикладная механика, метод конечных элементов (МКЭ), топологическая оптимизация, напряженно-деформированное состояние, метод SIMP, податливость, эквивалентные напряжения.

Keywords: applied mechanics, finite element method (FEM), topology optimization, stress-strain state, SIMP method, compliance, equivalent stresses.

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие современного машиностроения, аэрокосмической и автомобильной промышленности диктует жесткие требования к проектированию несущих элементов конструкций. Одной из главных тенденций является курс на максимальное снижение массы изделий без потери их несущей способности, жесткости и усталостной долговечности. Снижение массы напрямую влияет на энергоэффективность механизмов, расход топлива, динамические характеристики роторных и рычажных систем, а также на себестоимость производства за счет экономии дорогостоящих конструкционных материалов.

Традиционные подходы к проектированию, базирующиеся на аналитических методах сопротивления материалов и классической теории упругости, часто приводят к созданию перетяжеленных конструкций с избыточными коэффициентами запаса прочности. В условиях сложных трехмерных геометрий и многокомпонентных нагрузок аналитический поиск оптимального распределения материала внутри заданного объема практически невозможен. На смену эмпирическим методам в прикладной механике пришли мощные численные инструменты, в первую очередь — метод конечных элементов (МКЭ) и алгоритмы топологической оптимизации.

Топологическая оптимизация представляет собой математический подход к распределению материала внутри заданной области (проектного пространства) при заданных нагрузках, граничных условиях и ограничениях таким образом, чтобы максимизировать рабочие характеристики детали. Этот метод позволяет получать бионические, неинтуитивные формы деталей, в которых материал располагается исключительно вдоль линий главных напряжений, образуя пространственные ферменные или оболочечные структуры. Внедрение аддитивных технологий (3D-печати металлами) сняло большинство технологических ограничений на изготовление деталей со сложной топологией, сделав исследования в области оптимизации крайне востребованными.

Целью настоящей работы является исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) тяжелонагруженного кронштейна методами прикладной механики и проведение его топологической оптимизации с целью снижения массы при обеспечении заданного коэффициента запаса прочности.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

2.1. Математический аппарат метода конечных элементов

В основе оценки напряженно-деформированного состояния лежит краевая задача теории упругости. В матричной формулировке метода конечных элементов для статической линейно-упругой задачи основное разрешающее уравнение имеет вид:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (1)$$

где $[K]$ — глобальная матрица жесткости конструкции, зависящая от геометрии конечных элементов и физико-механических свойств материала (модуля Юнга и коэффициента Пуассона); $\{U\}$ — вектор-столбец неизвестных узловых перемещений; $\{F\}$ — вектор-столбец приложенных внешних узловых сил.

После вычисления поля перемещений деформации в каждой точке конечного элемента определяются через матрицу градиентов формы $[B]$:

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{u\} \quad (2)$$

Напряжения вычисляются на основе обобщенного закона Гука через матрицу упругости материала $[D]$:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} \quad (3)$$

Для оценки прочности деталей из пластичных материалов в прикладной механике традиционно применяется четвертая теория прочности (энергетическая теория формоизменения). Эквивалентное напряжение по фон Мизесу вычисляется через компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_v = (0,5 \cdot ((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)))^{0.5} \quad (4)$$

2.2. Метод твердого изотропного материала с пенализацией (SIMP)

Среди множества алгоритмов топологической оптимизации (метод гомогенизации, метод эволюционного структурного развития BESO, метод

поверхностей уровня) наибольшее распространение в коммерческих САЕ-системах получил метод SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization). В этом методе задается непрерывное распределение фиктивной плотности материала x_i для каждого конечного элемента. Плотность может принимать значения от 0 (пустота, отсутствие материала) до 1 (сплошной материал).

Модуль упругости элемента зависит от его плотности по степенному закону:

$$E(x_i) = E_{\min} + x_i^p \cdot (E_0 - E_{\min}) \quad (5)$$

где E_0 — модуль упругости сплошного базового материала; $E_{\min}$ — минимальный модуль упругости пустоты (задается малым числом, порядка 10^{-9} МПа, для предотвращения сингулярности матрицы жесткости); p — штрафной коэффициент (обычно $p = 3$), который заставляет промежуточные плотности (от 0 до 1) быть экономически «невыгодными» для алгоритма, тем самым вынуждая элементы сходиться либо к 0, либо к 1, формируя четкие границы получаемой детали.

Стандартной математической постановкой задачи топологической оптимизации является минимизация податливости (максимизация интегральной жесткости) конструкции при ограничении на массу (объем):

$$C(\{x\}) = \{\mathbf{F}\}^T \cdot \{\mathbf{U}\} \rightarrow \min \quad (6)$$

При ограничениях: $V(\{x\}) / V_0 \leq V_f$, где V_0 — начальный объем проектной области, V_f — целевая массовая доля (например, 0,4, что означает сохранение 40% массы). В процессе решения алгоритм итеративно обновляет плотности элементов на основе анализа их чувствительности (производной целевой функции по плотности элемента) до достижения сходимости.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МАТЕРИАЛЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве объекта исследования выбран несущий кронштейн шарнирной подвески. Базовая 3D-модель кронштейна представляет собой массивную прямоугольную проушину, имеющую два цилиндрических отверстия для

болтового крепления к неподвижному основанию (заделка по всем степеням свободы) и одно центральное отверстие, через которое передается рабочая нагрузка.

Граничные условия для МКЭ анализа заданы следующим образом: на цилиндрических поверхностях двух крепежных отверстий наложено жесткое ограничение перемещений ($U_x = U_y = U_z = 0$). В центральное отверстие вставлен виртуальный абсолютно жесткий штифт, к центральной точке которого приложена статическая нагрузка $F = 15$ кН, действующая под углом 45 градусов к горизонтальной оси. Такой характер нагружения вызывает в кронштейне сложное напряженное состояние (комбинацию изгиба, среза и растяжения).

В качестве конструкционного материала детали выбран высокопрочный деформируемый алюминиевый сплав Д16Т (дюралюминий), широко применяемый в аэрокосмической технике. Механические характеристики материала, введенные в конечно-элементный решатель, представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Механические характеристики алюминиевого сплава Д16Т

Параметр материала	Обозначение	Значение	Размерность
Модуль упругости (Юнга)	E	71 000	МПа
Коэффициент Пуассона	μ	0,33	-
Плотность	ρ	2 780	кг/м ³
Предел текучести	$\sigma_{\text{т}}$	275	МПа
Предел прочности	$\sigma_{\text{в}}$	420	МПа

Для численного решения была построена конечно-элементная сетка (КЭС) с использованием тетраэдрических элементов второго порядка (содержащих промежуточные узлы на гранях для точного аппроксимирования криволинейных границ и градиентов напряжений). Средний размер элемента составил 2 мм. Итоговая дискретная математическая модель содержала 185

400 конечных элементов и 278 120 узлов, что обеспечивает высокую точность получаемых результатов.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

4.1. Анализ напряженно-деформированного состояния базовой модели

На первом этапе был произведен статический расчет базовой (сплошной) модели кронштейна для оценки изначальных запасов прочности и жесткости. Масса изначальной детали составила 1,45 кг. Анализ цветовых эпюр распределения эквивалентных напряжений показал, что материал используется крайне нерационально. Около 75% объема детали находится в недонапряженном состоянии (уровень напряжений от 2 до 15 МПа). Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу локализуются в зонах концентрации у крепежных отверстий и составляют 85 МПа. Поскольку предел текучести сплава Д16Т равен 275 МПа, минимальный коэффициент запаса прочности по текучести составляет $n = 275 / 85 = 3,23$. Максимальные перемещения нагруженного узла составили всего 0,12 мм. Такой высокий запас прочности свидетельствует о целесообразности проведения топологической оптимизации с целью удаления «лишнего» материала.

4.2. Итерационный процесс топологической оптимизации

Для оптимизации была сформулирована целевая функция: минимизация податливости (максимизация жесткости) конструкции. Ограничение: сохранение 45% от исходного объема проектного пространства (доля объема $V_f = 0,45$). Для предотвращения искажения посадочных мест вокруг отверстий были заданы так называемые неоптимизируемые зоны (frozen regions) в виде цилиндрических колец толщиной 5 мм от кромок отверстий, в которых алгоритму запрещалось удалять материал.

Решение задачи методом SIMP потребовало 32 итераций для достижения сходимости целевой функции. Динамика изменения податливости и удаляемого объема материала по ключевым итерациям приведена в таблице 2.

Таблица 2 – Изменение характеристик конструкции в процессе оптимизации

Номер итерации	Сохраняемый объем, %	Относительная податливость	Макс. напряжения, МПа
0	100	1,000	85
5	82	1,045	92
10	65	1,180	104
20	50	1,350	125
32 (Итог)	45	1,520	152

По мере удаления материала (снижения плотности элементов), податливость системы закономерно возрастает (жесткость падает). Алгоритм автоматически формирует в теле кронштейна сквозные пустоты, оставляя силовой каркас, состоящий из тяжей (ферменных элементов), направленных строго по векторам главных растягивающих и сжимающих напряжений.

4.3. Оценка оптимизированной модели (верификационный расчет)

Полученная фасеточная бионическая модель была сглажена, конвертирована в твердотельную CAD-геометрию (NURBS-поверхности) и заново подвергнута конечно-элементному анализу (проверочному расчету) с той же КЭ сеткой и теми же граничными условиями. Это необходимо, так как сглаживание геометрии вносит изменения в конфигурацию силовых элементов.

Результаты проверочного расчета показали, что масса кронштейна снизилась с 1,45 кг до 0,65 кг (экономия составила 55%). Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу возросли до 152 МПа. Данные напряжения локализуются на внутренних галтелях образовавшихся силовых тяжей. Минимальный коэффициент запаса прочности по пределу текучести в оптимизированной модели составил $n = 275 / 152 = 1,81$. Для деталей авиационной и общей машиностроительной отрасли запас прочности $n > 1,5$ обычно признается достаточным для статических нагрузок. Максимальные перемещения под нагрузкой возросли до 0,25 мм, что удовлетворяет требованиям кинематической жесткости механизма.

Для наглядности сравнительные характеристики исходной и оптимизированной моделей сведены в таблицу 3.

Таблица 3 – Сравнение результатов расчета базовой и оптимизированной конструкций

Характеристика	Исходная модель	Оптимизированная	Изменение
Масса детали, кг	1,45	0,65	Снижение на 55%
Максимальные напряжения, МПа	85	152	Рост на 78%
Максимальные перемещения, мм	0,12	0,25	Увеличение в 2 раза
Коэффициент запаса прочности	3,23	1,81	В пределах допуска

Проведенный анализ наглядно подтверждает главный постулат топологической оптимизации: удаление материала из слабонагруженных зон приводит к более равномерному распределению напряжений по всему объему детали. Конструкция становится равнопрочной, устраняются «паразитные» массы, не участвующие в передаче силовых потоков. Несмотря на ожидаемое увеличение абсолютных значений напряжений и податливости, деталь полностью сохраняет свою работоспособность.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения данной научно-исследовательской работы решена комплексная задача механики деформируемого твердого тела — анализ и оптимизация несущего элемента конструкции.

На основании численного моделирования методом конечных элементов (МКЭ) установлено, что базовая конструкция кронштейна из алюминиевого сплава Д16Т обладала существенной избыточной массой, а уровень рабочих напряжений не превышал 30% от предела текучести.

Применение метода твердого изотропного материала с пенализацией (SIMP) позволило перераспределить материал в рабочем объеме детали, сформировав бионическую пространственную структуру.

В результате топологической оптимизации масса кронштейна была снижена на 55% (с 1,45 кг до 0,65 кг). Максимальные эквивалентные напряжения возросли до 152 МПа, при этом гарантированный коэффициент запаса прочности по текучести составил 1,81, что полностью удовлетворяет нормативным требованиям безопасности.

Таким образом, доказана высокая эффективность интеграции методов классической прикладной механики и современных алгоритмов компьютерной оптимизации. Данный подход является мощнейшим инструментом ресурсосбережения при проектировании высокоответственных деталей для авиастроения, автомобилестроения и тяжелого машиностроения, особенно в связке с аддитивными технологиями производства (3D-печать).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация / Пер. с англ. – Москва: Мир, 1986. – 318 с.
2. Бате К. Ю. Методы конечных элементов / Пер. с англ. – Москва: Физматлит, 2010. – 1024 с.
3. Луцко, А. Н. Прикладная механика: учебное пособие / А. Н. Луцко, М. Д. Телепнев, Н. А. Марцулевич [и др]; под общ. ред. Н. А. Марцулевича – 5-е изд., исп. – Санкт-Петербург: СПбГТИ(ТУ), 2013. – 273 с.
4. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736 с.
5. Bendsøe M. P., Sigmund O. Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications. – Berlin: Springer-Verlag, 2003. – 370 p.
6. Комаров В. А., Кузнецов А. С. Топологическая оптимизация несущих конструкций в системах инженерного анализа // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2015. – Т. 14, № 1. – С. 56-65.

7. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Пер. с англ. – Москва: Мир, 1984. – 428 с.

REFERENCES

1. Zienkiewicz O., Morgan K. Finite Elements and Approximation. Moscow: Mir, 1986. 318 p. (In Russ.)
2. Bathe K. J. Finite Element Procedures. Moscow: Fizmatlit, 2010. 1024 p. (In Russ.)
3. Lutsko A.N., Telepnev M.D., Martsulevich N.A. [et al.] Applied mechanics: textbook; under general ed. N.A. Martsulevich. 5th ed., rev. St. Petersburg: SPbSTI(TU), 2013. 273 p. (In Russ.)
4. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. Handbook on Strength of Materials. Kiev: Naukova Dumka, 1988. 736 p. (In Russ.)
5. Bendsøe M. P., Sigmund O. Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2003. 370 p.
6. Komarov V. A., Kuznetsov A. S. Topology optimization of load-bearing structures in engineering analysis systems // Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering. 2015. Vol. 14, No. 1. P. 56-65. (In Russ.)
7. Gallagher R. Finite Element Analysis: Fundamentals. Moscow: Mir, 1984. 428 p. (In Russ.)