

Егоров Валерий Александрович

магистрант, Арзамасский политехнический институт (филиал)

Нижегородского государственного технического университета

им. Р. Е. Алексеева

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ САНКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В статье разработан алгоритм численного исследования дискретной модели повторяющихся санкций и контрсанкций. Алгоритм объединяет аналитическую классификацию режима, адаптивный выбор расчетного горизонта, рекуррентное построение траекторий, контроль вычислительного дефекта и расчет показателей устойчивости. Предложено предварительно разделять пространство параметров по общему коэффициенту усиления, а моделирование выполнять для репрезентативных сценариев. Получены формулы автоматического определения числа шагов в устойчивом и неустойчивом режимах. Показано, что короткий фиксированный горизонт способен ошибочно интерпретировать медленное затухание как устойчивое ненулевое колебание.

Ключевые слова: дискретная модель, санкционное взаимодействие, численный алгоритм, устойчивость, расчетный горизонт, критерий остановки, вычислительный эксперимент, воспроизводимость.

The paper develops an algorithm for numerical analysis of a discrete model of repeated sanctions and counter-sanctions. The algorithm combines analytical regime classification, adaptive selection of the computational horizon, recursive trajectory generation, numerical-defect control, and stability indicators. The parameter space is first partitioned using the overall gain factor, while trajectories are calculated for representative scenarios. Formulas for automatic determination of the required number of steps in stable and unstable regimes are obtained. A short fixed horizon may incorrectly interpret slow decay as a persistent nonzero process.

Key words: discrete model, sanctions interaction, numerical algorithm, stability, computational horizon, stopping criterion, computational experiment, reproducibility.

Введение

Дискретные модели применимы к процессам, в которых решения принимаются последовательно, а реакция формируется после наблюдения предыдущего действия другой стороны. Такой механизм лежит в основе модели повторяющихся санкций и контрсанкций А. Л. Фрадкова [4, с. 11010–11014]. В отличие от моделей истощения Осипова–Ланчестера [3, с. 59–74; 5, с. 278–288], динамика определяется взаимным усилением приращений, а не непрерывным уменьшением ресурса. Систематизация моделей Осипова–Ланчестера, включая дискретные варианты и модели с переменными коэффициентами, представлена в работе Д.А. Новикова [2, с. 136–140].

Прямой расчет заранее заданного числа шагов не всегда дает надежный вывод. Короткий горизонт может скрыть медленное затухание вблизи границы устойчивости. Избыточный горизонт в неустойчивом режиме приводит к вычислению уже неинформативных больших значений. Полный перебор длинных траекторий на плотной сетке параметров также дублирует аналитически предсказуемые операции.

Цель работы — разработать алгоритм, который до запуска основного цикла классифицирует режим, назначает достаточный горизонт, завершает расчет по содержательному критерию и проверяет результат по независимому соотношению. В отличие от статьи о программной реализации, рассматривается вычислительная процедура, не зависящая от языка и библиотеки. Научный результат состоит в объединении аналитического критерия устойчивости с адаптивными правилами расчета и внутренней верификацией траектории.

Исходная модель

Пусть x_k и y_k обозначают уровни воздействия двух сторон. Детерминированная модель имеет вид

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(y_k - y_{k-1}), \quad y_{k+1} = y_k + \beta(x_k - x_{k-1}), \quad (1)$$

где $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ — коэффициенты реакции. Для численного расчета вводятся приращения $u_k = x_k - x_{k-1}$ и $v_k = y_k - y_{k-1}$. Тогда

$$u_{k+1} = \alpha v_k, \quad v_{k+1} = \beta u_k. \quad (2)$$

Для вектора $\mathbf{z}_k = (u_k, v_k)^T$ получаем

$$\mathbf{z}_{k+1} = A\mathbf{z}_k, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = qI, \quad q = \alpha\beta. \quad (3)$$

Следовательно,

$$\mathbf{z}_{2m+1} = q^m \mathbf{z}_1, \quad \mathbf{z}_{2m+2} = q^m A \mathbf{z}_1. \quad (4)$$

Формула (4) используется и для классификации режима, и как эталон при проверке вычислений. Уровни восстанавливаются накоплением приращений. При $0 \leq q < 1$ существуют пределы

$$x_\infty = x_0 + \frac{u_1 + \alpha v_1}{1 - q}, \quad y_\infty = y_0 + \frac{v_1 + \beta u_1}{1 - q}. \quad (5)$$

Поэтому алгоритм должен анализировать отдельно затухание реакции и накопленный уровень. При q , близком к единице, приращения устойчивы, но пределы могут быть большими из-за множителя $(1 - q)^{-1}$.

Структура алгоритма

Входной набор содержит x_0, x_1, y_0, y_1 , коэффициенты α, β , абсолютную и относительную точность, предельный масштаб L и защитное число шагов $N_{\max}$. Сначала проверяются конечность значений и допустимость параметров. Затем рассчитываются начальные приращения, q и спектральный радиус

$$\rho(A) = \sqrt{q}. \quad (6)$$

При $q < 1$ система классифицируется как асимптотически устойчивая по приращениям, при $q > 1$ — как неустойчивая. Граничный режим фиксируется условием $|q - 1| \leq \tau_q$, где τ_q учитывает точность представления параметров. Предварительная классификация предотвращает ошибку, при которой рост уровней x_k и y_k принимается за неустойчивость, хотя их приращения затухают.

После классификации назначается расчетный горизонт. В устойчивом режиме для требуемого масштаба ε число двухшаговых циклов оценивается по формуле

$$m_\varepsilon = \text{ceil}\left(\frac{\ln(\varepsilon/Z_0)}{\ln q}\right), \quad Z_0 = \max\{\|\mathbf{z}_1\|, \|A\mathbf{z}_1\|\}. \quad (7)$$

Расчетный горизонт принимается равным $N_\varepsilon = 2m_\varepsilon + 2$. При $q = 0$ логарифмическая формула не используется: ненулевые приращения исчезают не более чем за два перехода. В неустойчивом режиме момент достижения порога L оценивается аналогично:

$$m_L = \text{ceil}\left(\frac{\ln(L/Z_0)}{\ln q}\right), \quad N_L = 2m_L + 2. \quad (8)$$

Фактический горизонт ограничивается $N_{\max}$. Если начальные приращения нулевые, траектория постоянна при любых коэффициентах, и расчет завершается до использования логарифмов.

Основной цикл выполняется по рекуррентной форме (2), после чего обновляются уровни. Хранение приращений предпочтительнее повторного вычитания близких накопленных значений: оно сокращает число операций и избегает потери значащих цифр [6, с. 9–18]. Остановка по затуханию выполняется, если

$$\max(|u_k|, |v_k|) \leq \varepsilon_{\text{abs}} + \varepsilon_{\text{rel}} \max\{1, |x_k|, |y_k|\} \quad (9)$$

на двух последовательных шагах. Два шага необходимы из-за независимой эволюции четной и нечетной подпоследовательностей. В неустойчивом режиме расчет прекращается при превышении L хотя бы одной из величин u_k, v_k, x_k, y_k .

Выход алгоритма включает класс режима, число выполненных шагов, причину остановки, траектории, время установления и коэффициент пикового усиления

$$P_N = \frac{\max_{1 \leq k \leq N} \|\mathbf{z}_k\|}{\|\mathbf{z}_1\|}. \quad (10)$$

Показатель P_N отделяет переходный пик от асимптотической устойчивости. Например, при $\alpha = 1,4, \beta = 0,5$ имеем $q = 0,7 < 1$, но начальное состояние $(0,1,1)^T$ переходит в $(1,4,0,05)^T$. Норма сначала возрастает, а затем каждые два шага умножается на 0,7.

Контроль корректности расчета

Верификация выполняется по двухшаговому тождеству. Для каждого доступного k рассчитывается нормированный дефект

$$d_k = \frac{\| \mathbf{z}_{k+2} - q\mathbf{z}_k \|}{\| \mathbf{z}_{k+2} \| + q \| \mathbf{z}_k \| + \eta}. \quad (11)$$

Максимум d_k должен находиться на уровне накопленной ошибки округления. Существенное значение указывает на ошибку индексации или неверный порядок обновления переменных. Дополнительно несколько точек сравниваются с формулой (4), а в устойчивом режиме последние уровни — с пределами (5). Такое разделение соответствует различию между верификацией вычислительного решения и валидацией предметной модели [7, с. 22–35].

Контрольные соотношения необходимы, поскольку правдоподобный график может быть получен и при ошибочной программе. Простота исходной системы позволяет использовать точное решение как автоматический тест. В нелинейных расширениях, где замкнутая формула отсутствует, тот же блок может сравнивать расчеты на разных шагах сетки или с эталонным высокоточным решением.

Исследование пространства параметров

Пусть задана сетка из M_α значений α и M_β значений β . Наивный полный перебор имеет трудоемкость $O(M_\alpha M_\beta N)$. В разработанном алгоритме для каждой пары сначала рассчитывается $q_{ij} = \alpha_i \beta_j$, после чего строится аналитическая карта режимов. Численные траектории вычисляются только для R репрезентативных точек: внутри устойчивой области, около границы, в неустойчивой области и для асимметричных коэффициентов. Трудоемкость составляет

$$C = O(M_\alpha M_\beta) + O(RN), \quad R \ll M_\alpha M_\beta. \quad (12)$$

При 141 значении каждого коэффициента число пар равно 19881. Расчет 200 шагов для каждой пары потребовал бы почти четыре миллиона обновлений. Аналитическая классификация и моделирование двенадцати характерных

траекторий требуют около двадцати тысяч операций для карты и 2400 рекуррентных шагов. При переходе к нелинейной модели плотный расчет можно оставить только в полосе около предварительно найденной границы.

Тестовые сценарии

При $\alpha = 0,7$, $\beta = 0,8$ получаем $q = 0,56$. Для $u_1 = v_1 = 1$ уменьшение приблизительно в тысячу раз достигается за 12 двухшаговых циклов, поскольку $q^{12} \approx 0,000951$. Остановка происходит около 25-го шага. При $x_0 = y_0 = 0$ пределы равны $x_\infty \approx 3,8636$ и $y_\infty \approx 4,0909$.

Для близкого к границе режима $\alpha = 0,98$, $\beta = 0,99$ имеем $q = 0,9702$. То же уменьшение требует 229 двухшаговых циклов, то есть около 459 шагов. На первых 50 шагах множитель равен примерно $q^{25} \approx 0,470$, поэтому фиксированный короткий расчет не показывает установления. При единичных начальных приращениях предельные уровни составляют около 66,4 и 66,8.

В неустойчивом сценарии $\alpha = 1,05$, $\beta = 1,02$, $q = 1,071$. При пороге $L = 100$ формула (8) дает примерно 68 двухшаговых циклов, или 137 шагов. После достижения порога расчет завершается. Продолжение до нескольких тысяч шагов не изменило бы классификацию, но повысило бы риск переполнения.

Во всех сценариях дефект (11) оставался на уровне машинного округления, а контрольные значения совпадали с (4). Эксперименты показывают, что алгоритм должен не просто строить последовательность, а согласовывать аналитический прогноз, продолжительность расчета, критерий остановки и независимую проверку.

Воспроизводимость и ограничения

Один шаг требует постоянного числа операций, поэтому временная сложность траектории равна $O(N)$. При сохранении всех значений память составляет $O(N)$; для потокового расчета без графика достаточно двух последних состояний и нескольких показателей, то есть $O(1)$.

Для воспроизводимости сохраняются все входные параметры, фактический горизонт, причина остановки, выбранная норма и версия вычислительной среды. Рекомендуется избегать ручного изменения

промежуточных данных и фиксировать полный порядок операций [8, с. 1–5]. Такая организация позволит позднее добавить ансамблевый блок для случайных коэффициентов, не меняя детерминированное ядро.

Воспроизводимость не равна достоверности предметной интерпретации. Повторяемый расчет не доказывает, что α и β правильно оценены для реального конфликта. Практическое применение требует идентификации параметров и проверки устойчивости выводов при их изменении. Это соответствует концепции «мягких» моделей, в которой значение имеет сохранение качественного результата при неопределенности [1, с. 23–26].

Заключение

Разработан алгоритм численного исследования дискретной модели санкционного взаимодействия. Он включает переход к приращениям, предварительную классификацию по $q = \alpha\beta$, адаптивный выбор горизонта, рекуррентный расчет, содержательные критерии остановки и внутреннюю верификацию.

Получены формулы числа шагов для достижения заданной точности в устойчивом режиме и порогового уровня в неустойчивом. Показано, что близость к $q = 1$ резко увеличивает необходимый горизонт, а асимметрия коэффициентов способна вызывать переходный пик без потери асимптотической устойчивости.

Для параметрических исследований предложена гибридная схема: аналитическая классификация всей сетки и расчет репрезентативных траекторий. Она сокращает трудоемкость и сохраняет информацию о переходных процессах. Алгоритм может использоваться как независимое от программной среды ядро вычислительного эксперимента и как основа последующей реализации и расширения модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. 2-е изд., стер. М.: МЦНМО, 2008. 32 с. URL: <https://old.mccme.ru/publications/2008.html>.

2. Новиков Д.А. Эффекты научения в моделях Осипова–Ланчестера // Управление большими системами. 2025. Вып. 116. С. 135–153. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ubs1303>.
3. Осипов М.П. Влияние численности сражающихся сторон на их потери // Военный сборник. 1915. № 6. С. 59–74. URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_013402690/.
4. Fradkov A.L. International Stability under Iterated Sanctions and Counter-sanctions // IFAC-PapersOnLine. 2023. Vol. 56. No. 2. P. 11010–11014. DOI: 10.1016/j.ifacol.2023.10.800.
5. Helmbold R.L. Osipov: The ‘Russian Lanchester’ // European Journal of Operational Research. 1993. Vol. 65. No. 2. P. 278–288. DOI: 10.1016/0377-2217(93)90341-J.
6. Higham N.J. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms. 2nd ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. 680 p. DOI: 10.1137/1.9780898718027.
7. Oberkampf W.L., Roy C.J. Verification and Validation in Scientific Computing. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. xiv, 767 p. DOI: 10.1017/CBO9780511760396.
8. Sandve G.K., Nekrutenko A., Taylor J., Hovig E. Ten Simple Rules for Reproducible Computational Research // PLOS Computational Biology. 2013. Vol. 9. No. 10. Art. e1003285. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1003285.

© Езоров В.А., 2026