

Егоров Валерий Александрович

магистрант, Арзамасский политехнический институт (филиал)

Нижегородского государственного технического университета

им. Р. Е. Алексеева

АНАЛИЗ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ САНКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В статье исследуется абсолютная устойчивость дискретной модели взаимных санкционных реакций при неизвестной форме нелинейностей и интервально заданных коэффициентах. Получено необходимое и достаточное условие затухания приращений для всех допустимых функций и последовательностей параметров. Введен запас абсолютной устойчивости, позволяющий оценивать допустимое усиление неопределенности и близость системы к критической границе. Рассмотрены устойчивый, пограничный, асимметричный и номинально устойчивый, но робастно неустойчивый режимы. Показано, почему отдельные численные траектории не заменяют проверку всего допустимого класса моделей.

Ключевые слова: абсолютная устойчивость, дискретная система, санкционное взаимодействие, интервальная неопределенность, секторная нелинейность, робастность, запас устойчивости, системный анализ.

The paper studies absolute stability of a discrete model of mutual sanctions responses with unknown nonlinearities and interval-valued coefficients. A necessary and sufficient condition is obtained for decay of increments under every admissible nonlinearity and parameter sequence. An absolute-stability margin is introduced to estimate admissible uncertainty growth and the distance to the critical boundary. Robustly stable, near-boundary, asymmetric, and nominally stable but non-robust regimes are examined. The results explain why simulation of individual trajectories cannot replace analysis of the entire model class.

Key words: absolute stability, discrete system, sanctions interaction, interval uncertainty, sector-bounded nonlinearity, robustness, stability margin, system analysis.

Введение

Дискретная модель повторяющихся санкций и контрсанкций описывает реакцию каждой стороны на предыдущее изменение воздействия оппонента [6, с. 11010–11014]. В линейном случае устойчивость определяется произведением двух коэффициентов перекрестной реакции. Практическое применение этого результата ограничено тем, что точные значения коэффициентов неизвестны, могут изменяться от этапа к этапу и не полностью отражают нелинейный характер решений.

Теория абсолютной устойчивости устанавливает устойчивость не одной выбранной функции, а всего класса нелинейных элементов [2, с. 86–95; 3, с. 246–248]. Это соответствует принципу «мягких» моделей: вывод должен сохраняться при допустимом изменении функций и параметров [1, с. 5–8].

Кибернетические модели санкционного взаимодействия включают базовую дискретную, стохастическую и управляемую постановки [4, с. 165–168; 6, с. 11010–11014]. Для учета неизвестной формы нелинейных реакций в настоящей работе вводятся секторные ограничения. Дополнительно учитывается интервальная нестационарность коэффициентов. Они могут принимать разные значения на каждом шаге, оставаясь внутри заданных диапазонов. Объектом анализа становится не одна траектория, а множество допустимых систем.

Цель статьи — получить критерий абсолютной устойчивости дискретной модели санкционного взаимодействия при совместном действии секторной нелинейности и интервально изменяющихся коэффициентов. Дополнительно вводится запас устойчивости, формируется процедура проверки и сопоставляются характерные параметрические режимы.

Постановка задачи

Пусть x_n и y_n обозначают уровни ограничительного воздействия двух сторон, а $v_n = x_n - x_{n-1}$ и $w_n = y_n - y_{n-1}$ — их приращения. Рассматривается перекрестная система

$$v_{n+1} = a_{1,n}w_n + f_1(w_n), \quad w_{n+1} = a_{2,n}v_n + f_2(v_n). \quad (1)$$

Коэффициенты $a_{1,n}$ и $a_{2,n}$ характеризуют базовую чувствительность сторон. Функции f_1 и f_2 описывают дополнительную нелинейную реакцию, точная форма которой не задается. Класс неопределенности определяется условиями

$$\underline{a}_i \leq a_{i,n} \leq \bar{a}_i, \quad 0 \leq z f_i(z) \leq \mu_i z^2, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Секторное ограничение допускает линейную функцию, насыщение и плавное изменение наклона, если дополнительный ответ сохраняет знак входа и не превышает границу μ_i . Интервалы коэффициентов не снабжаются вероятностным распределением: любое значение внутри них считается возможным.

Абсолютная устойчивость означает, что приращения v_n и w_n стремятся к нулю, а уровни x_n и y_n остаются ограниченными для любых допустимых функций, последовательностей коэффициентов и конечных начальных условий. Это требование сильнее локальной устойчивости одной выбранной нелинейности и сильнее устойчивости нескольких рассчитанных траекторий.

Критерий абсолютной устойчивости

Из условий (2) следует, что абсолютная величина ответа первой стороны не превосходит $(\bar{a}_1 + \mu_1)|w_n|$, а второй — $(\bar{a}_2 + \mu_2)|v_n|$. Через два шага каждая переменная зависит от собственного предыдущего значения. Наихудший двухшаговый коэффициент и запас устойчивости равны

$$\bar{q} = (\bar{a}_1 + \mu_1)(\bar{a}_2 + \mu_2), \quad \Delta = 1 - \bar{q}; \quad \bar{q} < 1. \quad (3)$$

Условие $\bar{q} < 1$ достаточно, поскольку для любой допустимой реализации выполняются оценки $|v_{n+2}| \leq \bar{q}|v_n|$ и $|w_{n+2}| \leq \bar{q}|w_n|$. Четные и нечетные подпоследовательности убывают геометрически. Суммы модулей приращений конечны, поэтому уровни сходятся к конечным значениям.

Условие является необходимым для заявленного класса. При $\bar{q} \geq 1$ допустимо зафиксировать коэффициенты на верхних границах и выбрать $f_i(z) = \mu_i z$. Тогда двухшаговый множитель равен $\bar{q}$. При значении больше единицы существует возрастающая траектория, а при равенстве единице — незатухающая. Следовательно, единая гарантия для всех систем отсутствует.

Нарушение критерия означает не обязательный рост каждой траектории, а существование допустимой неблагоприятной реализации. Поэтому выборочные расчеты не доказывают абсолютную устойчивость.

Критерий симметричен относительно перестановки сторон, но не требует равенства их параметров. Один эффективный коэффициент может быть близок к единице или превышать ее, если второй достаточно мал и произведение остается меньше единицы. Следовательно, изолированная оценка каждой реакции менее информативна, чем анализ полного перекрестного контура.

Запас устойчивости и области параметров

Величина Δ характеризует расстояние наихудшего режима до критической границы. Большой запас означает, что небольшая ошибка оценки интервалов не изменит вывод. Значение, близкое к нулю, соответствует формально устойчивой, но чувствительной системе. Для оценки допустимой неопределенности и длительности затухания используются выражения

$$\mu_{2,\max} = \frac{1}{\bar{a}_1 + \mu_1} - \bar{a}_2, \quad N_\varepsilon \leq 2 + \frac{2\ln\varepsilon}{\ln\bar{q}}. \quad (4)$$

Первая величина показывает максимальную секторную границу второй реакции при фиксированных остальных параметрах. Она может рассматриваться как бюджет неопределенности. Аналогично определяется допустимый запас для первой стороны. Вторая оценка задает наихудшее число шагов, необходимое для уменьшения приращений до доли ε от начального значения.

В пространстве параметров выделяются робастно устойчивая область $\bar{q} < 1$ граница $\bar{q} = 1$ и область без абсолютной гарантии. Внутри устойчивой области целесообразно различать нормальный и пограничный режимы. Последний имеет малый запас и требует точной идентификации параметров и увеличенного горизонта численного расчета.

Особое значение имеет номинально устойчивый, но робастно неустойчивый класс. В нем произведение выбранных или средних параметров меньше единицы, тогда как верхняя интервальная оценка превышает единицу.

Одна номинальная траектория затухает, но допустимое множество содержит сценарий эскалации.

Процедура проверки

Проверка включает выделение приращений, задание интервальных коэффициентов и выбор секторных границ. Верхние значения должны отражать максимально обоснованный режим: слишком широкий диапазон делает критерий консервативным, а слишком узкий создает ложную гарантию. После вычисления $\bar{q}$ и Δ определяется допустимое изменение критических параметров.

Численный эксперимент проверяет реализацию и типичные переходные процессы. Обязателен наихудший сценарий с верхними коэффициентами и максимальными линейными наклонами. Для пограничного режима горизонт выбирается по аналитической оценке: при $\bar{q}$, близком к единице, короткая траектория может выглядеть почти постоянной.

Численный анализ

В первом сценарии заданы интервалы $a_{1,n} \in [0,58; 0,66]$ и $a_{2,n} \in [0,62; 0,70]$, секторные границы $\mu_1 = 0,14$ и $\mu_2 = 0,10$. Верхние эффективные коэффициенты равны 0,80 и 0,80. Получено $\bar{q} = 0,64$, $\Delta = 0,36$. Стократное уменьшение приращений гарантируется не позднее 22-го шага.

В 10 000 расчетов по 40 шагов коэффициенты и наклоны выбирались внутри допустимых границ. Медиана конечного модуля составила $7,25 \cdot 10^{-7}$, 99-й перцентиль — $1,58 \cdot 10^{-6}$; типичные реализации затухали быстрее гарантированной оценки.

Во втором сценарии номинальные коэффициенты равны 0,65 и 0,66 при $\mu_1 = \mu_2 = 0,14$. Номинальное произведение эффективных коэффициентов составляет 0,632. Однако верхние интервальные границы равны 0,89 и 0,86, поэтому $\bar{q} = (0,89 + 0,14)(0,86 + 0,14) = 1,03$. Абсолютная устойчивость отсутствует.

Случайный перебор в основном показывал затухание, однако при верхних коэффициентах и максимальных линейных наклонах амплитуда через два шага

умножается на 1,03 и за 40 шагов возрастает примерно в 1,81 раза. Выборочные траектории, следовательно, не заменяют робастный анализ.

Третий сценарий демонстрирует асимметрию. Верхние коэффициенты равны 0,92 и 0,58, секторные границы — 0,03 и 0,07. Эффективные коэффициенты составляют 0,95 и 0,65, их произведение — 0,6175, запас — 0,3825. Несмотря на различие реакций, весь класс абсолютно устойчив, а стократное уменьшение гарантируется не позднее 20-го шага.

В четвертом сценарии верхние коэффициенты равны 0,85 и 0,87, секторные границы — 0,14 и 0,12. Оба эффективных множителя равны 0,99, поэтому $\bar{q} = 0,9801$ и $\Delta = 0,0199$. Формально система абсолютно устойчива, но наихудшая оценка стократного уменьшения достигает 460 шагов. После 40 шагов в случайном ансамбле медиана модуля составляла 0,00486, а 99-й перцентиль — 0,00996. Короткий расчет выглядит благоприятно, однако робастный запас остается малым.

Обсуждение и ограничения

Абсолютная устойчивость характеризует математический контур, а не прогнозирует политические решения. Интервальная постановка не требует знать точную последовательность коэффициентов, но требует обоснованно задать верхние границы: завышение делает критерий консервативным, занижение создает ложный запас. Секторная модель остается компромиссом между фиксированной и произвольной зависимостью [1, с. 5–8].

Модель ограничена двумя сторонами, одним шагом запаздывания и неизменной структурой связей. Не учитываются третьи участники, несколько отраслевых каналов и нелинейности, меняющие знак реакции. Для систем большей размерности прямое двухшаговое сведение может быть невозможно; тогда применяются частотные критерии, интегральные квадратичные ограничения и методы абсолютной устойчивости импульсных систем [5, с. 81–101; 7, с. 819–830; 8, с. 228–238].

Если интервалы построены по редким выбросам, класс может оказаться чрезмерно широким. Вероятностный анализ в этом случае дополняет абсолютный, но не заменяет его.

Заключение

Получено необходимое и достаточное условие абсолютной устойчивости дискретной модели санкционного взаимодействия при секторно ограниченных нелинейностях и интервально изменяющихся коэффициентах. Критерий основан на произведении верхних эффективных коэффициентов и гарантирует геометрическое затухание приращений и ограниченность уровней для любой допустимой реализации.

Введен запас устойчивости и определена допустимая граница дополнительной нелинейной неопределенности. Численные сценарии показали различие между номинальной и робастной устойчивостью, допустимость асимметричных параметров и медленное затухание около критической границы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. 2-е изд., стер. М.: МЦНМО, 2008. 32 с. URL: <https://old.mccme.ru/free-books/dubna/arnold.pdf>.
2. Либерзон М.Р. Очерки о теории абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2006. № 10. С. 86–119. URL: <https://www.mathnet.ru/at1246>.
3. Лурье А.И., Постников В.Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 246–248. URL: <https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues/1944/8-3/246>.
4. Фрадков А.Л. A Cybernetic View on International Stability under Multiple Sanctions and Counter-sanctions // Cybernetics and Physics. 2022. Vol. 11. No. 3. P. 165–168. DOI: 10.35470/2226-4116-2022-11-3-165-168.
5. Якубович В.А. Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. II // Автоматика и телемеханика. 1968. № 2. С. 81–101. URL: <https://www.mathnet.ru/eng/at10496>.

6. Fradkov A.L. International Stability under Iterated Sanctions and Counter-sanctions // IFAC-PapersOnLine. 2023. Vol. 56. No. 2. P. 11010–11014. DOI: 10.1016/j.ifacol.2023.10.800.
7. Megretski A., Rantzer A. System Analysis via Integral Quadratic Constraints // IEEE Transactions on Automatic Control. 1997. Vol. 42. No. 6. P. 819–830. DOI: 10.1109/9.587335.
8. Zames G. On the Input-Output Stability of Time-Varying Nonlinear Feedback Systems. Part I // IEEE Transactions on Automatic Control. 1966. Vol. 11. No. 2. P. 228–238. DOI: 10.1109/TAC.1966.1098316.

© *Ezopov B.A.*, 2026