

Сивогринов Д.Е.

студент Арзамасского политехнического института (филиал)

Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е.

Алексеева, Россия, г. Арзамас

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Аннотация. В статье рассматривается геометрическая интерпретация линейных конформных отображений комплексной плоскости. Исследуется функция вида $w = az + b$, где a и b – комплексные постоянные, $a \neq 0$.

Ключевые слова: комплексная плоскость, конформное отображение, линейная функция, геометрическая интерпретация.

Abstract. The paper considers the geometric interpretation of linear conformal mappings of the complex plane. The function $w = az + b$ is studied, where a and b are complex constants and $a \neq 0$.

Keywords: complex plane, conformal mapping, linear function, geometric interpretation.

Конформные отображения позволяют исследовать преобразование одной области комплексной плоскости в другую с сохранением углов между пересекающимися кривыми.

Особенность линейного преобразования состоит в том, что его действие на комплексной плоскости можно представить поэтапно. Сначала выполняется умножение на комплексное число a , которое определяет поворот и изменение масштаба, а затем прибавляется число b , задающее параллельный перенос. Такой подход позволяет перейти от формулы к геометрической картине и, наоборот, восстановить формулу по заданному геометрическому преобразованию.

Цель работы – показать, каким образом параметры линейной функции определяют геометрическое поведение комплексной плоскости и её областей. Для

достижения цели рассматриваются свойства функции, отдельные элементарные преобразования, неподвижная точка и отображение типичных геометрических областей.

1. Линейное отображение и его основные свойства

Рассмотрим целую линейную функцию комплексного переменного

$$w = az + b, \quad (1)$$

где $a, b \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$. Производная функции постоянна:

$$f'(z) = a. \quad (2)$$

Поскольку a не равно нулю, производная нигде не обращается в нуль. Следовательно, функция аналитична и локально сохраняет углы. Для линейного преобразования это свойство выполняется на всей комплексной плоскости.

Ключ к геометрической интерпретации находится в представлении коэффициента a в тригонометрической форме:

$$a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (3)$$

Умножение произвольного комплексного числа z на $\cos \varphi + i \sin \varphi$ поворачивает соответствующий радиус-вектор на угол φ . Множитель $|a|$ изменяет его длину в $|a|$ раз.

Таким образом, действие функции можно представить следующим образом: исходная область $\rightarrow$ поворот на $\varphi \rightarrow$ изменение масштаба в $|a|$ раз $\rightarrow$ параллельный перенос на b . Если $|a| > 1$, происходит растяжение; если $0 < |a| < 1$ – сжатие; при $|a| = 1$ размеры не изменяются. Знак и направление угла φ определяют ориентацию поворота.

Важным следствием является сохранение формы простых геометрических объектов. Прямая при линейном преобразовании остаётся прямой, окружность переходит в окружность, а треугольник – в подобный треугольник. Поэтому линейные функции особенно удобны для исследования областей, границы которых имеют простую геометрическую структуру.

2. Неподвижная точка и центр геометрического преобразования

Геометрическая интерпретация становится особенно наглядной при исследовании неподвижной точки. Точка z_0 называется неподвижной, если её образ совпадает с ней самой:

$$f(z_0) = z_0. \quad (4)$$

Для линейной функции условие (4) имеет вид

$$az_0 + b = z_0. \quad (5)$$

Если $a \neq 1$, из (5) получаем единственную конечную неподвижную точку:

$$z_0 = b/(1 - a). \quad (6)$$

Это соотношение имеет простой геометрический смысл. Перенесём начало отсчёта в точку z_0 . Используя (5), исходную функцию можно записать в виде

$$w - z_0 = a(z - z_0). \quad (7)$$

В формуле (7) отсутствует свободное слагаемое. Поэтому преобразование относительно неподвижной точки представляет собой чистое умножение на a , то есть поворот и изменение масштаба. Следовательно, z_0 является центром соответствующего геометрического преобразования.

Пусть $a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда из (7) следует, что любой вектор, проведённый из z_0 к точке z , после преобразования поворачивается на угол φ и изменяет длину в $|a|$ раз. При этом углы между кривыми сохраняются.

Особый интерес представляет случай $a = 1$. Если $b = 0$, функция имеет вид $w = z$ и является тождественным отображением: каждая точка комплексной плоскости является неподвижной. Если $b \neq 0$, получаем $w = z + b$ — ненулевой параллельный перенос. В этом случае конечных неподвижных точек нет, поскольку равенство $z + b = z$ невозможно.

Таким образом, коэффициенты линейной функции позволяют сразу определить характер преобразования. Значение $a \neq 1$ указывает на существование единственного центра поворота и гомотетии, а случай $a = 1$ выделяет либо тождественное отображение, либо чистый перенос.

3. Геометрическая интерпретации на примере областей

Связь аналитической и геометрической форм особенно хорошо проявляется при преобразовании полос, кругов и треугольников.

3.1. Полосы. Полоса ограничена двумя параллельными прямыми. При её отображении линейной функцией эти прямые остаются прямыми и сохраняют параллельность. Поэтому основными параметрами задачи являются положение границ и расстояние между ними. Если границы исходной полосы расположены неудобно, выполняется параллельный перенос. Затем ширина полосы изменяется посредством умножения на вещественный коэффициент. В заключение область переносится в требуемое положение.

Таким образом, последовательность преобразования полосы можно представить как перенос $\rightarrow$ сжатие или растяжение $\rightarrow$ перенос.

3.2. Круги. Для круга существенными характеристиками являются центр и радиус. Наиболее наглядный алгоритм состоит в переносе центра исходного круга в начало координат, изменении радиуса, а затем переносе центра в требуемую точку. Если исходный радиус равен R_1 , а требуемый – R_2 , общий коэффициент масштабирования по модулю равен R_2/R_1 .

Поворот круга вокруг собственного центра не изменяет его как множество, поэтому для задачи отображения круга на круг важнее всего обеспечить правильные центр и радиус. При этом линейное отображение не искажает окружность: окружность переходит в окружность.

3.3. Треугольники. При преобразовании треугольника необходимо учитывать положение трёх вершин, размеры сторон и ориентацию. Линейное конформное отображение сохраняет углы, поэтому исходный треугольник переходит в подобный треугольник. Для совмещения фигур могут потребоваться поворот, изменение масштаба и перенос.

Если направления соответствующих сторон не совпадают, сначала определяется угол поворота. Затем подбирается масштаб по длине

соответствующих сторон. После этого выполняется перенос одной из характерных точек в положение соответствующей точки результирующей фигуры.

Для всех трёх объектов действует единый принцип: необходимо выделить инвариантные характеристики и определить параметры, которые должна изменить функция. У полосы это параллельность границ и ширина, у круга – круговая форма и отношение радиусов, у треугольника – углы и отношение соответствующих сторон.

4. Практический алгоритм построения и исследования

На основании рассмотренных свойств можно сформулировать общий алгоритм исследования линейного конформного отображения.

Первый этап – записать функцию в стандартном виде $w = az + b$ и определить коэффициенты a и b . Второй этап – представить коэффициент a через модуль и аргумент. Это позволяет сразу определить масштаб и угол поворота. Третий этап – установить наличие неподвижной точки по формуле $z_0 = b/(1 - a)$, если $a \neq 1$. Четвёртый этап – перейти к каноническому виду $w - z_0 = a(z - z_0)$. Пятый этап – сопоставить полученные параметры с геометрией исходной и результирующей областей.

При решении обратной задачи, когда геометрическое преобразование задано словами или рисунком, действия выполняются в противоположном направлении. Сначала определяется необходимый перенос, затем масштаб и угол поворота. После этого элементарные операции объединяются в единую функцию.

Рассмотрим общий пример. Пусть требуется повернуть область относительно точки z_0 на угол φ и изменить её размеры в k раз. Тогда выбирается коэффициент

$$a = k(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (8)$$

а преобразование относительно центра записывается как

$$w - z_0 = k(\cos \varphi + i \sin \varphi)(z - z_0). \quad (9)$$

После раскрытия скобок получается линейная функция $w = az + b$, где

$b = z_0(1 - a)$. Таким образом, геометрическая постановка непосредственно приводит к аналитическому выражению.

5. Заключение

Геометрическая интерпретация линейных конформных отображений позволяет связать формулу комплексной функции с наглядными преобразованиями плоскости. Для функции $w = az + b$ коэффициент a определяет одновременно поворот и изменение масштаба, а число b задаёт параллельный перенос. При $a \neq 1$ существует единственная конечная неподвижная точка, относительно которой преобразование принимает особенно простой вид.

Проведённый анализ показывает, что линейные отображения удобны для исследования геометрических областей с простыми границами. Общим для всех задач является возможность представить сложное на первый взгляд отображение как композицию элементарных операций.

Полученные результаты могут использоваться при изучении теории функций комплексного переменного и решении задач на построение конформных отображений.

Использованные источники

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1981. 305 с.