

Егоров Валерий Александрович

магистрант, Арзамасский политехнический институт (филиал)

Нижегородского государственного технического университета

им. Р. Е. Алексеева

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ САНКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В статье исследовано влияние случайных возмущений на возможность стабилизационного управления дискретной моделью санкционного взаимодействия в условиях параметрической неопределенности. Управляемость рассматривается как существование допустимых управляющих множителей, обеспечивающих среднеквадратическое затухание приращений. Получен критерий стохастической стабилизируемости при ограниченной глубине управляющего воздействия и показано существование шумового порога, выше которого стабилизация невозможна. Для симметричного случая определено критическое значение управляющего множителя. Вычислительный эксперимент выявил различие между высокой вероятностью попадания в целевую область и надежностью управления по хвостовым характеристикам распределения.

Ключевые слова: дискретная система, санкционное взаимодействие, стохастическое управление, управляемость, стабилизируемость, случайные возмущения, среднеквадратическая устойчивость, вычислительный эксперимент.

The paper investigates how random disturbances affect stabilizing control of a discrete sanctions interaction model. Controllability is interpreted as the existence of admissible control factors that ensure mean-square decay of state increments. A stochastic stabilizability criterion is obtained for bounded control authority, and a disturbance threshold above which stabilization is impossible is identified. A critical control intensity is derived for the symmetric case. Computational experiments reveal

a difference between a high probability of reaching the target region and control reliability measured by distribution-tail characteristics.

Key words: discrete system, sanctions interaction, stochastic control, controllability, stabilizability, random disturbances, mean-square stability, computational experiment.

Введение

Управление дискретной системой обычно проектируется по номинальной модели, после чего проверяется при неопределенности. Для санкционного взаимодействия эта проверка принципиальна: коэффициенты реакции не наблюдаются непосредственно и меняются под влиянием экономических, политических и информационных факторов. Решение, достаточное для детерминированной траектории, может оказаться ненадежным при случайном изменении коэффициентов.

В модели повторяющихся санкций управление вводится через множители, ослабляющие интенсивность ответной реакции [5, с. 11012–11013]. Однако детерминированное условие не показывает, сохраняется ли результат при шуме и ограниченной глубине воздействия. Цель работы — установить условия существования допустимого управления, обеспечивающего среднеквадратическое затухание приращений, и оценить различие между вероятностью достижения целевой области и надежностью по хвостовым характеристикам распределения.

Смысл управляемости в рассматриваемой модели

Классическая полная управляемость означает возможность перевести линейную систему между произвольными состояниями. Здесь управляющие переменные не добавляют независимый вход, а изменяют коэффициенты взаимной реакции. Поэтому рассматривается стабилизационная управляемость: существование допустимых управляющих множителей, при которых приращения санкционного давления затухают в среднем квадратичном.

Дополнительно используется вероятностная достижимость целевой области — доля реализаций, в которых к заданному моменту оба приращения

становятся меньше установленного порога; задачи вероятностной достижимости и безопасности для дискретных стохастических систем рассматриваются в [3, с. 2725–2732]. Этот показатель не заменяет устойчивость второго момента: высокая вероятность успеха может сочетаться с редкими крупными выбросами.

Управляемая стохастическая модель

Пусть v_k и w_k — приращения воздействия двух сторон, u_k и z_k — управляющие множители, а ξ_k и η_k — случайные изменения поведения. Модель записывается как

$$v_{k+1} = (\alpha u_k + \xi_k)w_k, \quad w_{k+1} = (\beta z_k + \eta_k)v_k. \quad (1)$$

Возмущения считаются центрированными, независимыми от предыдущего состояния и имеющими дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 . Использование случайных коэффициентов для учета неопределенности соответствует стохастическим вариантам моделей Ланчестера [2, с. 57–59]. Управление ограничено: $u_k \in [u_{\min}, 1]$, $z_k \in [z_{\min}, 1]$. Нижние границы отражают невозможность мгновенно полностью устранить сформированную реакцию.

При постоянных u и z среднее состояние подчиняется детерминированной модели с коэффициентами αu и βz . Для второго момента через два шага возникает коэффициент

$$\Gamma(u, z) = (\alpha^2 u^2 + \sigma_x^2)(\beta^2 z^2 + \sigma_y^2). \quad (2)$$

Условие $\Gamma(u, z) < 1$ обеспечивает среднеквадратическое затухание. Оно строже детерминированного условия $\alpha\beta uz < 1$, поскольку дисперсии увеличивают эффективное усиление [6, с. 795–806]. Следовательно, управление средней траекторией не гарантирует ограничения разброса реализаций.

Критерий стохастической стабилизируемости

Функция $\Gamma(u, z)$ возрастает по каждому множителю. Наиболее сильное допустимое воздействие достигается при $u = u_{\min}$ и $z = z_{\min}$. Поэтому среднеквадратическая стабилизация возможна тогда и только тогда, когда

$$(\alpha^2 u_{\min}^2 + \sigma_x^2)(\beta^2 z_{\min}^2 + \sigma_y^2) < 1. \quad (3)$$

Критерий связывает номинальную реакцию, шум и ресурс управления. Если он не выполнен, ни одно разрешенное постоянное управление не дает требуемой гарантии. Даже при $u_{\min} = z_{\min} = 0$ сохраняется шумовой предел $\sigma_x^2 \sigma_y^2 < 1$: управление уменьшает систематическую реакцию, но не устраняет внешний источник случайности.

Для симметричного случая $\alpha = \beta = a$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, $u = z = r$ получаем критическую границу

$$r < r_{\text{cr}} = \frac{\sqrt{1 - \sigma^2}}{a}. \quad (4)$$

Рост дисперсии уменьшает r_{cr} , то есть требует более сильного ослабления реакции. Если допустимо только $r \geq r_{\min}$ и $r_{\min} \geq r_{\text{cr}}$, система теряет стабилизационную управляемость в принятом диапазоне решений.

Влияние возмущений на ресурс управления

Случайные возмущения действуют по трем основным механизмам. Во-первых, они расходуют запас устойчивости: при произведении $\alpha\beta uz$, близком к единице, даже умеренная дисперсия делает Γ больше единицы. Во-вторых, шум повышает минимально необходимую глубину управления, и требуемый множитель может выйти за допустимый диапазон. В-третьих, асимметричная неопределенность одной стороны передается обоим компонентам через перекрестную связь.

Ошибка исполнения управления имеет тот же эффект. Случайные отклонения фактического управляющего множителя можно интерпретировать как дополнительную мультипликативную неопределенность, что соответствует постановкам стохастического модельно-прогнозирующего управления

[4, с. 168–171; 7, с. 35–40]. Поэтому умеренное, но точно выполняемое решение может быть надежнее более сильного воздействия с большим разбросом.

Анализ характерных режимов

Рассмотрим симметричную систему с $a = 1,05$. Без управления номинальный общий коэффициент равен 1,1025. Выбор $u = z = 0,9$ уменьшает его до 0,8930, то есть стабилизирует детерминированную систему.

При $\sigma = 0,15$ получаем $\Gamma = 0,8382$, и управление сохраняет среднеквадратическую эффективность. При $\sigma = 0,35$ детерминированный коэффициент не меняется, но Γ возрастает до 1,0313. Средняя траектория затухает, тогда как второй момент становится неустойчивым. Формула (4) дает $r_{cr} \approx 0,892$; множитель 0,9 находится выше границы. Усиление управления до $u = z = 0,8$ уменьшает Γ до 0,6857 и восстанавливает устойчивость.

Если допустимо $r \geq 0,8$, то при $\sigma = 0,55$ критическое значение равно примерно 0,798. Требуемое воздействие оказывается сильнее разрешенного, поэтому гарантия отсутствует. В асимметричном примере $\alpha = 1,2$, $\beta = 0,9$, $\sigma_x = 0,3$, $\sigma_y = 0,1$, $z = 1$ достаточно выбрать $u < 0,886$. При росте σ_x до 0,6 граница снижается до $u < 0,773$; ограничение $u \geq 0,8$ делает одностороннее управление недостаточным. Снижение z второй стороной может восстановить условие (3).

Вычислительный эксперимент

Для оценки вероятностной достижимости смоделировано 100 000 независимых реализаций системы (1). Начальные приращения равны единице, горизонт составляет 40 шагов, возмущения имеют нормальное распределение. Целевая область задается условием, что модули обеих компонент не превышают 0,2.

При $u = z = 0,9$ и $\sigma = 0,15$ цель достигнута в 76,0% реализаций. Медиана максимального модуля равна 0,110, 95-й перцентиль — 0,451, 99-й — 0,826. При $\sigma = 0,35$ доля попаданий увеличилась до 86,0%, а медиана уменьшилась до 0,016, но 99-й перцентиль вырос до 3,15. Большинство траекторий быстро уменьшается, однако редкие последовательности крупных коэффициентов создают выбросы и определяют рост второго момента.

После усиления управления до $u = z = 0,8$ при $\sigma = 0,35$ цель достигнута в 99,9% реализаций. Медиана составила около $6,5 \cdot 10^{-5}$, 95-й процентиль — 0,0054, 99-й — 0,0315. Снижение Γ уменьшило не только типичное значение, но и хвост распределения. Следовательно, одну вероятность попадания нельзя использовать как единственный показатель: необходимы также второй момент и высокий процентиль [4, с. 167–172].

Выбор управляющего воздействия

Практическая процедура состоит из трех этапов. Сначала оцениваются номинальные коэффициенты и дисперсии. Затем проверяется значение Γ при максимально допустимом ослаблении реакции. Если оно не меньше единицы, необходимо расширить ресурс управления, уменьшить источник неопределенности либо изменить структуру воздействия.

При выполнении критерия множители следует выбирать с запасом, а не на границе. Аналитический расчет дополняется ансамблевым моделированием, в котором контролируются вероятность попадания в целевую область, 95-й или 99-й процентиль и частота превышения критического уровня. Это позволяет отделить типичное затухание от редких эскалационных выбросов.

Обсуждение и ограничения

Результаты получены для независимых центрированных возмущений с постоянными дисперсиями. Корреляция, зависимость шума от состояния и временная память изменяют уравнения моментов. В таких случаях критерий (3) служит предварительной оценкой, а точный анализ требует расширенной стохастической модели [6, с. 806–809]. Для нелинейных дискретных систем дополнительный анализ стохастической устойчивости может проводиться с использованием ляпуновских мер [8, с. 4646–4651].

Численные значения не являются оценками реальных международных процессов. Они демонстрируют математические пороги. Практическое применение требует идентификации коэффициентов, дисперсий и диапазонов управления. Нормальное распределение также является допущением; при тяжелых хвостах редкие выбросы возникают чаще, что повышает значение

робастного анализа. В соответствии с концепцией мягких моделей важен не единичный прогноз, а сохранение качественного вывода при изменении предположений [1, с. 23–26].

Заключение

Исследовано влияние случайных возмущений на стабилизационную управляемость дискретной модели санкционного взаимодействия. Получен критерий существования допустимых постоянных управляющих множителей, обеспечивающих среднеквадратическое затухание. Установлено, что шум уменьшает запас управления и при ограниченной глубине воздействия может привести к потере стабилизируемости.

Для симметричной системы определено критическое значение управляющего множителя. Показано, что решение, достаточное для детерминированной модели, может не ограничивать второй момент после введения случайных колебаний. Асимметричная неопределенность передается всей системе и иногда требует согласованного воздействия обеих сторон.

Вычислительный эксперимент выявил различие между высокой вероятностью достижения целевой области и хвостовой надежностью. Поэтому управляемость следует оценивать по совокупности аналитического критерия, вероятности успеха и высоких процентилях. Результаты объединяют системный анализ, стохастическое моделирование, теорию управления, статистическую обработку и вычислительный эксперимент.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. 2-е изд., стер. М.: МЦНМО, 2008. 32 с. URL: <https://old.mccme.ru/publications/2008.html>.
2. Задорожний В.Г., Чеботарев А.С., Дикарев Е.Е. Стохастическая модель боевых действий Ланчестера // Математическое моделирование. 2021. Т. 33. № 5. С. 57–77. DOI: 10.20948/mm-2021-05-05.
3. Probabilistic Reachability and Safety for Controlled Discrete Time Stochastic Hybrid Systems / A. Abate, M. Prandini, J. Lygeros, S. Sastry // Automatica. 2008. Vol. 44. No. 11. P. 2724–2734. DOI: 10.1016/j.automatica.2008.03.027.

4. Cannon M., Kouvaritakis B., Wu X. Model Predictive Control for Systems with Stochastic Multiplicative Uncertainty and Probabilistic Constraints // Automatica. 2009. Vol. 45. No. 1. P. 167–172. DOI: 10.1016/j.automatica.2008.06.017.
5. Fradkov A.L. International Stability under Iterated Sanctions and Counter-sanctions // IFAC-PapersOnLine. 2023. Vol. 56. No. 2. P. 11010–11014. DOI: 10.1016/j.ifacol.2023.10.800.
6. Hosoe Y., Hagiwara T. On Second-Moment Stability of Discrete-Time Linear Systems with General Stochastic Dynamics // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. Vol. 67. No. 2. P. 795–809. DOI: 10.1109/TAC.2021.3057994.
7. Mesbah A. Stochastic Model Predictive Control: An Overview and Perspectives for Future Research // IEEE Control Systems Magazine. 2016. Vol. 36. No. 6. P. 30–44. DOI: 10.1109/MCS.2016.2602087.
8. Vaidya U. Stochastic Stability Analysis of Discrete-Time System Using Lyapunov Measure // 2015 American Control Conference. Chicago: IEEE, 2015. P. 4646–4651. DOI: 10.1109/ACC.2015.7172061.

© *Ezopov B.A.*, 2026