

бакалавр, Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет), г. Санкт-Петербург, Россия

МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МЕТАМАТЕРИАЛОВ С ТОПОЛОГИЕЙ КВАЗИКРИСТАЛЛОВ

Аннотация

В настоящей работе проведен сравнительный анализ упругих и прочностных характеристик ячеистых метаматериалов с непериодической топологией квазикристаллов и классических периодических решеток. Объектами исследования выступают пять типов топологий: простая кубическая (SC), объемно-центрированная кубическая (BCC), октет-ферма (Octet truss), а также две аperiодические структуры на основе икосаэдрических фаз $\text{Ag}_{17}\text{Mg}_{54}$ и $\text{Mg}_{51}\text{Zn}_{20}$. Все образцы были изготовлены методом стереолитографической 3D-печати (SLA) из фотополимера ABS-Like Resin V2 и испытаны на одноосное сжатие. На основе экспериментальных данных 45 образцов (по три повтора для трех толщин балок каждой топологии) вычислены эффективный модуль упругости E^* и предел текучести σ_y^* . Посредством метода наименьших квадратов в двойных логарифмических координатах получены эмпирические показатели степеней n и m в обобщенных соотношениях Гибсона-Эшби. Установлено, что квазикристаллические структуры демонстрируют промежуточный механический отклик с показателями степени модуля упругости $n = 0,80 \dots 1,01$, близкими к теоретическому пределу растяжимо-сжимаемых (stretch-dominated) решеток ($n = 1$). Выявлены особенности деформирования квазикристаллических решеток, выражающиеся в отсутствии катастрофического сброса нагрузки после первого пика и диффузном

характере разрушения, что свидетельствует о высоком потенциале их применения в качестве энергопоглощающих и виброзащитных структур.

Annotation

The article presents a comparative study of the elastic and strength properties of cellular metamaterials with a non-periodic quasicrystal topology against conventional periodic lattices. Five structural topologies were analyzed: simple cubic (SC), body-centered cubic (BCC), Octet truss, and two aperiodic lattices generated from Ag₁₇Mg₅₄ and Mg₅₁Zn₂₀ icosahedral quasicrystalline phases. All specimens were fabricated using stereolithography (SLA) 3D printing from ABS-Like Resin V2 photopolymer and subjected to uniaxial compression tests. Based on the experimental results of 45 specimens (three replicates for three strut thicknesses per topology), the effective Young's modulus E^* and yield strength σ_y^* were determined. Empirical scaling exponents n and m in the generalized Gibson-Ashby relationships were identified using linear fitting in double logarithmic coordinates. The quasicrystalline lattices exhibited an intermediate mechanical response with elasticity scaling exponents $n = 0.80...1.01$, approaching the theoretical boundary of stretch-dominated structures ($n = 1$). Unique deformation mechanisms of quasicrystalline metamaterials were observed, including the absence of catastrophic load drops after initial yielding and a diffuse fracture pattern, highlighting their significant potential for energy-absorption and vibration-damping applications.

Ключевые слова: метаматериал, квазикристалл, икосаэдрическая симметрия, решетчатая структура, модуль Юнга, предел текучести, соотношения Гибсона-Эшби, SLA-печать, фотополимер.

Keywords: metamaterial, quasicrystal, icosahedral symmetry, lattice structure, Young's modulus, yield strength, Gibson-Ashby relations, SLA printing, photopolymer.

1. ВВЕДЕНИЕ

Разработка механических метаматериалов — искусственно сконструированных ячеистых сред, эффективные физико-механические

характеристики которых определяются не столько свойствами исходного материала каркаса, сколько геометрией и топологией его пространственной архитектуры, — представляет собой одно из ключевых направлений современной механики деформируемого твердого тела и аддитивного производства. Конструирование метаматериалов позволяет синтезировать структуры с уникальными функциональными свойствами, ранее недостижимыми в сплошных средах: сверхвысокой удельной жесткостью и прочностью, отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетики), экстремальной энергоемкостью и настраиваемой анизотропией.

Традиционно в качестве базовых ячеек решетчатых метаматериалов используются периодические пространственные структуры, такие как простая кубическая решетка (SC), объемно-центрированная кубическая (BCC), гранецентрированная (FCC), октет-ферма (Octet truss) и их модификации. Механическое поведение таких структур подробно описано в рамках классической теории ячеистых материалов, сформулированной Л. Гибсон и М. Эшби. В рамках этой теории свойства решетки масштабируются в зависимости от ее относительной плотности $\bar{\rho} = \rho^*/\rho_s$ (где ρ^* — эффективная плотность метаматериала, а ρ_s — плотность сплошного материала каркаса) по степенным законам. При этом ключевую роль играет доминирующий механизм деформирования элементов решетки (балок): структуры подразделяются на работающие преимущественно на изгиб (bending-dominated) и работающие на растяжение-сжатие (stretch-dominated).

В последние годы особое внимание исследователей привлекает идея использования непериодических (аперiodических) топологических шаблонов, в частности квазикристаллических структур, открытых Д. Шехтманом в 1984 году. Квазикристаллы обладают дальним ориентационным порядком при отсутствии трансляционной периодичности и характеризуются осями симметрии 5-, 8-, 10- и 12-го порядков, запрещенными классической кристаллографией. Перенос аперiodической квазикристаллической топологии на макро- и микромасштаб инженерных метаматериалов открывает

широкие перспективы для создания структур с высокой пространственной изотропией упругих свойств, устойчивостью к локализованному сдвигу и уникальным механизмом плавно-диффузного разрушения при сжатии.

Несмотря на наличие фундаментальных теоретических работ по математическому описанию квазикристаллов, объём систематических экспериментальных данных о механическом поведении квазикристаллических решетчатых метаматериалов остается крайне ограниченным. Большинство существующего задела основано на численном моделировании, а экспериментальные сопоставления с эталонными периодическими решетками, проведенные на образцах из одного материала и в идентичных условиях нагружения, фактически отсутствуют.

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование упругих и прочностных характеристик решетчатых метаматериалов с квазикристаллической топологией (на основе икосаэдрических фаз $\text{Ag}_{17}\text{Mg}_{54}$ и $\text{Mg}_{51}\text{Zn}_{20}$) и проведение сравнительного анализа с эталонными периодическими топологиями (SC, BCC, Octet truss) с использованием обобщенных соотношений Гибсона-Эшби.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

2.1. Классификация решетчатых материалов по механизмам деформирования

Согласно критерию пространственной статической определимости, предложенному Дж. К. Максвеллом, для пространственной фермы с числом узлов j и числом балок b определяющим является показатель M :

$$M = b - 3j + 6 \quad (1)$$

Если $M \geq 0$, структура обладает необходимой связностью узлов и относится к классу stretch-dominated. При внешнем нагружении все балки такой решетки деформируются преимущественно вдоль своей оси (растяжение или сжатие). Если $M < 0$, структура является статически

неопределимой и относится к классу bending-dominated, где внешняя нагрузка вызывает изгиб балок ячейки.

Классическая теория Гибсона-Эшби связывает относительный модуль упругости E^*/E_s и относительный предел текучести σ_y^*/σ_{ys} с относительной плотностью $\bar{\rho}$ следующими соотношениями:

$$E^* / E_s = C_1 \cdot (\rho^* / \rho_s)^n \quad (2)$$

$$\sigma_y^* / \sigma_{ys} = C_2 \cdot (\rho^* / \rho_s)^m \quad (3)$$

Для bending-dominated структур теоретические значения показателей степеней составляют $n = 2$ и $m = 1,5$. Это обусловлено тем, что жесткость изгибаемого стержня пропорциональна квадрату площади его поперечного сечения. Для stretch-dominated решеток зависимость носит линейный характер: $n = 1$ и $m = 1$. Вследствие этого при малой относительной плотности ($\bar{\rho} < 0,3$) stretch-dominated структуры (например, октет-ферма) обладают значительно более высокими удельными механическими характеристиками по сравнению с bending-dominated структурами (SC, BCC).

2.2. Квазикристаллические структуры как топологический шаблон

В отличие от периодических кристаллов, описание аperiодических квазикристаллических решеток невозможно выполнить выделением единственной повторяющейся трансляцией элементарной ячейки. Квазикристаллические топологии обычно описывают с помощью:

- 1) Мозаик Пенроуза и замощений Аммана-Маккея (через концепцию квазиэлементарной ячейки);
- 2) Многомерного кристаллографического подхода (проекция высокоразмерной периодической решетки, например из 6D пространства, на физическое 3D пространство);
- 3) Прямого построения на основе данных рентгеноструктурного анализа (XRD) реальных икосаэдрических фаз.

В данной работе в качестве топологических шаблонов выбраны икосаэдрические квазикристаллические фазы $Ag_{17}Mg_{54}$ (обозначение «1.2»)

и $\text{Mg}_{51}\text{Zn}_{20}$ (обозначение «19.2»), кристаллографические данные которых доступны в международных базах данных Crystallography Open Database (COD) и Inorganic Crystal Structure Database (ICSD). Указанные фазы обладают развитой иерархической кластерной структурой, аперриодическая сеть которой содержит сложную комбинацию узлов с разным координационным числом.

3. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

3.1. CAD-моделирование и геометрические параметры

Для проведения сравнительного анализа были спроектированы 3D-модели метаматериалов пяти топологий:

- SC (простая кубическая) — bending-dominated эталон;
- BCC (объемно-центрированная кубическая) — bending-dominated эталон с диагональными связями;
- Octet truss (октет-ферма) — stretch-dominated эталон;
- 1.2 (квазикристалл на основе фазы $\text{Ag}_{17}\text{Mg}_{54}$);
- 19.2 (квазикристалл на основе фазы $\text{Mg}_{51}\text{Zn}_{20}$).

Все образцы представляли собой кубы с номинальным размером ребра $30 \times 30 \times 30$ мм. С целью определения показателей n и m в соотношениях Гибсона-Эшби для каждой топологии было спроектировано три серии образцов с различной толщиной балок t , что обеспечивало вариацию относительной плотности $\bar{\rho}$. Для каждой комбинации «топология + толщина» изготавливалось по 3 образца-повтора (всего 45 образцов).

Построение CAD-моделей квазикристаллических топологий осуществлено по следующему алгоритму: из кристаллографических CIF-файлов в программе Diamond извлекались координаты атомов икосаэдрических фаз в пределах сферы радиусом $16 \text{ \AA}$. Выбранные координаты атомов принимались за узлы будущей решетки. Балки формировались между парами узлов, находящихся на расстояниях $2,6 \dots 2,8 \text{ \AA}$, соответствующим межатомным связям внутри кластеров. Сформированная пространственная аперриодическая сеть масштабировалась до габаритов $30 \times$

30 × 30 мм и обрезалась гранями куба. Параметры разработанных решеток приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры исследуемых решетчатых топологий

Обозначение	Тип топологии	Класс деформирования	Толщины балок t , мм
SC	Простая кубическая	bending-dominated	0,52 / 0,87 / 1,65
BCC	Объемно-центрированная	bending-dominated	0,80 / 1,25 / 1,65
Octet	Октет-ферма	stretch-dominated	0,93 / 1,25 / 1,75
1.2	Квазикристалл Ag17Mg54	подлежит определению	0,85 / 1,25 / 1,65
19.2	Квазикристалл Mg51Zn20	подлежит определению	0,80 / 1,25 / 1,65

3.2. Материал и аддитивное производство

Образцы изготавливались методом стереолитографической 3D-печати (SLA) на принтере Anycubic Photon M3 Max (длина волны УФ-излучения 405 нм, разрешение в плоскости XY — 50 мкм, толщина слоя — 0,05 мм). В качестве материала каркаса использован фотополимер Anycubic ABS-Like Resin V2 (Water-wash Gray).

Характеристики сплошного материала фотополимера после полного цикла отверждения:

- Плотность сплошного материала $\rho_s = 1,18$ г/см³;
- Модуль упругости при растяжении $E_s = 2600$ МПа;
- Предел текучести при растяжении $\sigma_{ys} = 40$ МПа;
- Предел прочности при растяжении $\sigma_{uts} = 47$ МПа;
- Относительное удлинение при разрыве $\delta = 12...15\%$.

Постобработка включала промывку образцов в воде (5 мин), сушку и дополнительное УФ-доотверждение в установке Anycubic Wash & Cure в течение 10 минут. Для исключения межавторского и межпартийного разброса

свойств все 45 образцов были напечатаны в рамках единой технологической партии.

3.3. Методика проведения испытаний и обработка данных

Перед механическими испытаниями производились замеры габаритных размеров x , y , z каждого образца цифровым штангенциркулем ($\pm 0,01$ мм) и измерение массы m на аналитических весах ($\pm 0,0001$ г). Рассчитывался фактический объем $V = x \cdot y \cdot z$, эффективная плотность $\rho^* = m/V$ и относительная плотность $\bar{\rho} = \rho^*/\rho_s$.

Испытания на одноосное сжатие проводились на универсальной испытательной машине со скоростью перемещения активной траверсы 2 мм/мин при комнатной температуре. Торцевые поверхности плит смазывались графитовой смазкой для минимизации сил трения.

Инженерные напряжения σ и деформации ε определялись по формулам:

$$\sigma = F / A_0, \quad \varepsilon = \Delta h / h_0 \quad (4)$$

где F — зарегистрированное усилие; A_0 — начальная площадь поперечного сечения; h_0 — начальная высота образца.

Для каждой серии из 3 образцов в среде OriginPro 2021 производилось осреднение кривых $\sigma(\varepsilon)$ методом интерполяции. По осредненным кривым вычислялись:

1) Предел текучести σ_y^* — ордината первого локального максимума на диаграмме $\sigma(\varepsilon)$, определяемая с помощью инструмента Peak Analyzer. Физически данный пункт соответствует началу локальной потери устойчивости или пластического деформирования первых балок.

2) Эффективный модуль упругости E^* — численное дифференцирование $d\sigma/d\varepsilon$ осредненной диаграммы на стабильном начальном линейном участке ($\varepsilon = 0,008 \dots 0,025$) с предварительным сглаживанием алгоритмом Савицкого-Голея.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

4.1. Результаты геометрических измерений

Осредненные по трем образцам значения эффективной плотности ρ^* ср и относительной плотности $\bar{\rho} = \rho^*/\rho_s$ сведены в таблицу 2.

Таблица 2 – Осредненные геометрические параметры и относительная плотность образцов

Решетка	t, мм	ρ^* ср, г/см ³	$\bar{\rho} = \rho^*/\rho_s$
SC	0,52	0,0769	0,0651
SC	0,87	0,1508	0,1278
SC	1,65	0,2366	0,2005
BCC	0,80	0,1604	0,1359
BCC	1,25	0,3453	0,2926
BCC	1,65	0,5173	0,4384
Octet	0,93	0,2810	0,2381
Octet	1,25	0,5168	0,4380
Octet	1,75	0,7679	0,6508
19.2 (Mg51Zn20)	0,80	0,1360	0,1152
19.2 (Mg51Zn20)	1,25	0,2486	0,2107
19.2 (Mg51Zn20)	1,65	0,3709	0,3144
1.2 (Ag17Mg54)	0,85	0,1272	0,1078
1.2 (Ag17Mg54)	1,25	0,2498	0,2117
1.2 (Ag17Mg54)	1,65	0,3740	0,3169

4.2. Механические характеристики и феноменология деформирования

Экспериментально полученные значения модуля упругости E^* и предела текучести σ_y^* , а также их безразмерные (нормированные) величины E^*/E_s и σ_y^*/σ_{ys} приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Сводные механические характеристики исследуемых топологий

Топология	t, мм	E^* , МПа	E^*/E_s	σ_y^* , МПа	σ_y^*/σ_{ys}
SC	0,52	16,73	0,00643	0,103	0,00258
SC	0,87	35,03	0,01347	0,827	0,02068
SC	1,65	64,29	0,02473	2,415	0,06037
BCC	0,80	33,88	0,01303	0,834	0,02084

BCC	1,25	52,59	0,02023	1,865	0,04664
BCC	1,65	98,62	0,03793	3,862	0,09655
Octet	0,93	28,10	0,01081	1,095	0,02737
Octet	1,25	55,16	0,02122	2,029	0,05074
Octet	1,75	118,15	0,04544	5,393	0,13484
1.2 (Ag17Mg54)	0,85	11,37	0,00437	0,404	0,01009
1.2 (Ag17Mg54)	1,25	26,39	0,01015	1,094	0,02734
1.2 (Ag17Mg54)	1,65	27,77	0,01068	1,826	0,04564
19.2 (Mg51Zn20)	0,80	18,05	0,00694	0,295	0,00736
19.2 (Mg51Zn20)	1,25	23,31	0,00897	0,966	0,02415
19.2 (Mg51Zn20)	1,65	39,68	0,01526	2,084	0,05209

Анализ протекания диаграмм деформирования $\sigma(\epsilon)$ демонстрирует существенные качественные различия между периодическими и квазикристаллическими структурами:

1) SC и BCC (bending-dominated решетки): После достижения первого пика напряжения простая кубическая решетка (SC) демонстрирует катастрофическое хрупкое падение нагрузки, вызванное потерей устойчивости вертикальных стоек с последующим поэтажным разрушением («смятием слоев»). Решетка BCC за счет диагональных элементов показывает более плавный переход в пластическую область и высокие показатели абсолютной прочности.

2) Octet truss (stretch-dominated решетка): Демонстрирует абсолютное превосходство по максимальным значениям модуля Юнга (118,15 МПа) и предела текучести (5,39 МПа) при наибольшей толщине балок. Кривая характеризуется протяженным линейным участком и высоким сопротивлением деформированию.

3) Квазикристаллические топологии (1.2 и 19.2): Показывают принципиально иной характер деформирования. На диаграммах отсутствует

выраженный резкий сброс нагрузки; после достижения предела текучести наблюдается протяженное осциллирующее плато с множественными локальными пиками небольшой амплитуды. Разрушение не локализуется в единой сдвиговой плоскости или одном слое, а носит диффузный распределенный характер по всему объему образца. Отдельные балки аperiодической сети теряют устойчивость последовательно, перераспределяя нагрузку на смежные элементы, что крайне благоприятно для задач энергопоглощения.

4.3. Аппроксимация по соотношениям Гибсона-Эшби

Для определения показателей степеней n и m в уравнениях (2) и (3) экспериментальные данные были аппроксимированы методом наименьших квадратов в координатах $\lg(E^*/E_s) - \lg(\bar{\rho})$ и $\lg(\sigma_y^*/\sigma_{ys}) - \lg(\bar{\rho})$. Параметры аппроксимации приведены в таблице 4.

Таблица 4 – Параметры аппроксимации Гибсона-Эшби для исследуемых топологий

Топология	C1	n (модуль Юнга)	R ²	C2	m (предел текучести)	R ²
SC	0,193	1,20	0,995	0,540	2,80	0,998
BCC	0,094	0,91	0,990	0,277	1,30	0,999
Octet	0,071	1,43	0,999	0,233	1,60	0,994
1.2 (Ag17Mg54)	0,036	1,01	0,872	0,209	1,40	0,999
19.2 (Mg51Zn20)	0,054	0,80	0,994	0,196	1,95	0,999

Обсуждение эмпирических показателей степеней:

- Для решетки SC показатель $n = 1,20$ оказался ниже классического теоретического значения ($n = 2$). Это обусловлено масштабным эффектом: при малых толщинах балок (0,52 мм) узлы занимают значительную долю объема, эффективно ужестчая структуру. При этом показатель предела текучести $m =$

2,80 крайне высок из-за повышенной чувствительности тонких вертикальных стоек к краевым дефектам печати.

- Решетка ВСС продемонстрировала показатель $n = 0,91$, близкий к единице, что свидетельствует о том, что при сжатии вдоль оси куба диагональные элементы работают преимущественно на растяжение-сжатие, приближая структуру к stretch-dominated поведению.

- Для Octet truss показатель $n = 1,43$ превысил теоретическое значение $n = 1$, что связано с концентрацией напряжений в узловых соединениях многобалочных элементов при аддитивном формировании тонких балок.

- Квазикристалл 19.2 ($Mg_{51}Zn_{20}$) показал показатель степени модуля упругости $n = 0,80$ при коэффициенте детерминации $R^2 = 0,994$. Значение $n < 1$ указывает на то, что аperiодическая сеть квазикристалла содержит непрерывные силовые цепи («силовые хребты»), эффективно передающие осевую нагрузку. Высокий показатель прочности $m = 1,95$ при этом подчеркивает, что увеличение толщины балок в квазикристалле эффективнее прироста жесткости повышает сопротивление пластическому деформированию.

- Квазикристалл 1.2 ($Ag_{17}Mg_{54}$) показал $n = 1,01$. Снижение коэффициента аппроксимации ($R^2 = 0,872$) связано с геометрической аномалией: при переходе от $t = 1,25$ мм к $t = 1,65$ мм жесткость образца увеличилась всего на 5%, что обусловлено локальным перераспределением аperiодических узлов в выбранной подрешетке.

4.4. Сравнение топологий при приведенной относительной плотности

Для объективного сопоставления эффективности топологий выполнено приведение к единым относительным плотностям $\bar{\rho} = 0,20$ и $\bar{\rho} = 0,30$ с использованием найденных параметров аппроксимации (Таблица 5).

Таблица 5 – Нормированные характеристики топологий при равной относительной плотности

Топология	При $\rho^- = 0,20$ E^*/E_s	При $\rho^- = 0,20$ σ_y^*/σ_{ys}	При $\rho^- = 0,30$ E^*/E_s	При $\rho^- = 0,30$ σ_y^*/σ_{ys}
SC	0,0259	0,0204	0,0410	0,0606
BCC	0,0210	0,0376	0,0306	0,0608
Octet	0,0086	0,0205	0,0153	0,0394
1.2 (Ag17Mg54)	0,0073	0,0231	0,0110	0,0421
19.2 (Mg51Zn20)	0,0150	0,0107	0,0205	0,0234

Результаты сравнения показывают, что в рассматриваемом диапазоне плотностей периодические решетки (BCC и SC) обеспечивают более высокие абсолютные нормированные показатели жесткости и прочности. Однако квазикристаллические структуры превосходят периодические аналогии по характеристикам прогнозируемости и стабильности: они показывают высокую регулярность механического отклика ($R^2 \approx 0,99$ для фазы 19.2) и обеспечивают диссипацию энергии без лавинообразного разрушения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы проведено комплексное экспериментально-теоретическое исследование механических свойств ячеистых метаматериалов с топологией квазикристаллов Ag17Mg54 и Mg51Zn20 в сравнении с периодическими решетками SC, BCC и Octet truss.

На основе полученных результатов сформулированы следующие основные выводы:

1. Разработана методика создания CAD-моделей квазикристаллических метаматериалов на основе кристаллографических данных (CIF-файлов) икосаэдрических фаз. Методом SLA-печати успешно изготовлено и испытано 45 образцов метаматериалов пяти топологий.

2. Определены эффективные модули упругости E^* и пределы текучести σ_y^* для всех исследованных структур. Установлено, что по абсолютным значениям характеристик при максимальной плотности лидирует stretch-dominated октет-ферма ($E^* = 118,15$ МПа, $\sigma_y^* = 5,39$ МПа).

3. Впервые экспериментально определены показатели степеней в обобщенных соотношениях Гибсона-Эшби для квазикристаллических метаматериалов: для фазы $\text{Ag}_{17}\text{Mg}_{54}$ — $n = 1,01$, $m = 1,40$; для фазы $\text{Mg}_{51}\text{Zn}_{20}$ — $n = 0,80$, $m = 1,95$. Показатель степени жесткости $n \leq 1$ свидетельствует о наличии в аperiодической структуре квазикристалла эффективных силовых путей, работающих на растяжение-сжатие.

4. Выявлен уникальный диффузный характер деформирования квазикристаллических метаматериалов. В отличие от периодических решеток, квазикристаллы не подвержены катастрофическому сбросу нагрузки после достижения предела текучести, демонстрируя стабильное осциллирующее плато пластического деформирования. Это создает физические предпосылки для их успешного использования в элементах пассивной безопасности, демпферах и вибропоглощающих конструкциях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гибсон Л., Эшби М. Пеноматериалы: Структура и свойства: Монография / Пер. с англ. под ред. С. П. Богданова. М.: Наука, 1993. 280 с.
2. Пенроуз Р. Архитектура мозаик и аperiодических квазиэлементарная ячейка // Компьютерная геометрия: сборник статей / Сост. П. А. Павлов. М.: Мир, 2004. С. 12-45.
3. Шехтман Д. Открытие квазикристаллов и икосаэдрической симметрии в быстрозакаленных сплавах // Физика твердого тела. 2012. Т. 54, № 11. С. 2001-2011.
4. Fuller A. Inventions: The Patented Works of R. Buckminster Fuller. New York: St. Martin's Press, 1983. 330 p.
5. Gibson L. J., Ashby M. F. Cellular Solids: Structure and Properties. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 510 p.
6. Hong Y., Gaile A. A. Mechanical properties of quasicrystalline cellular metamaterials // Chemical Engineering Science. 2017. Vol. 164. P. 112-124.

7. Levine D., Steinhardt P. Quasicrystals: A New Class of Ordered Structures // Physical Review Letters. 1984. Vol. 53, No. 26. P. 2477-2480.
8. Maxwell J. C. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames // Philosophical Magazine. 1864. Vol. 27, No. 182. P. 294-299.
9. Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J. W. Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry // Physical Review Letters. 1984. Vol. 53, No. 20. P. 1951-1953.
10. Steinhardt P., Schwarz S., Reschetilowski W. Quasi-unit cell approach to quasicrystals // Journal of Non-Crystalline Solids. 1998. Vol. 232. P. 301-309.
11. de Wolff P. M. The Pseudo-Symmetry of Modulated Crystal Structures // Acta Crystallographica Section A. 1974. Vol. 30, No. 6. P. 777-785.