

Егоров Валерий Александрович

магистрант,

Арзамасский политехнический институт

(филиал) Нижегородского государственного

технического университета им. Р. Е. Алексеева,

г. Арзамас

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТЬЮ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ САНКЦИЙ И КОНТРСАНКЦИЙ

Аннотация: В статье исследовано параметрическое управление устойчивостью дискретной модели повторяющихся санкций и контрсанкций. Получены условия стабилизации при постоянных и изменяющихся управляющих множителях, а также робастное условие при интервальной неопределенности коэффициентов реакции. Показано, что симметричное распределение управления минимизирует максимальную одностороннюю коррекцию, необходимую для достижения заданного запаса устойчивости. Предложен переключаемый алгоритм с гистерезисом, ограничивающий интенсивность взаимных реакций. Численный эксперимент подтверждает расчетные условия и показывает различие между асимптотическим затуханием и удержанием динамики в ограниченной области.

Ключевые слова: теория управления, математическое моделирование, дискретная система, устойчивость, санкции, обратная связь, робастность, переключаемое управление.

Abstract: The article examines parametric stability control for a discrete model of repeated sanctions and counter-sanctions. Stabilization conditions are obtained for constant and time-varying control multipliers, together with a robust condition under interval uncertainty of response coefficients. Balanced control allocation is shown to minimize the largest unilateral adjustment required to achieve a prescribed stability margin. A hysteresis-based switching algorithm is proposed to bound the intensity of mutual responses. Numerical experiments confirm the analytical conditions and distinguish asymptotic decay from bounded dynamics.

Keywords: control theory, mathematical modeling, discrete system, stability, sanctions, feedback, robustness, switching control.

Введение

Повторяющиеся санкции и контрсанкции образуют контур обратной связи: изменение позиции одного участника становится основанием для следующего решения другой стороны. При достаточно высокой взаимной чувствительности последовательность ответов не затухает, а каждое новое действие усиливает последующее. В такой постановке задача деэскалации может рассматриваться как задача управления коэффициентом усиления замкнутой системы, а не как прогноз содержания конкретных политических решений.

Применение методов управления к социальным и международным процессам обсуждается в исследованиях устойчивого развития и международной стабильности [1, с. 103–108; 2, с. 3124–3128]. Нечеткие когнитивные карты позволяют учитывать большое число причинных связей [3, с. 23–27], однако для аналитического выбора стабилизирующего воздействия требуется модель с явно выделенным контуром обратной связи. Такая возможность содержится в дискретной модели А. Л. Фрадкова, где интенсивность очередной реакции определяется приращением мер оппонента [4, с. 165–168; 5, с. 11010–11013].

Цель статьи состоит в разработке правил параметрического управления этой моделью. В отличие от анализа неуправляемой и стохастической динамики рассматривается целенаправленное изменение эффективных коэффициентов реакции. Решаются четыре задачи: выводится точное условие для постоянного управления; исследуется распределение корректирующего воздействия между участниками; формулируется робастное условие при неизвестных параметрах; проверяется переключаемый алгоритм, включающий управление только при выходе показателя реакции за допустимую границу.

Результаты исследования

Управляемая дискретная модель

Пусть x_n и y_n обозначают накопленные уровни мер двух сторон на шаге n , а $v_n = x_n - x_{n-1}$ и $w_n = y_n - y_{n-1}$ — их приращения. В базовой модели $v_{n+1} = \alpha w_n$ и $w_{n+1} = \beta v_n$, где α и β характеризуют чувствительность участников к последнему изменению позиции оппонента. Для введения управления используются положительные множители u_n и z_n , уменьшающие либо сохраняющие соответствующую реакцию:

$$v_{n+1} = \alpha u_n w_n, \quad w_{n+1} = \beta z_n v_n. \quad (1)$$

Ограничения $0 < u_n \leq 1$ и $0 < z_n \leq 1$ означают, что управление рассматривается как ослабление реакции. Значение, равное единице, соответствует отсутствию коррекции. Такой способ не задает конкретный политический инструмент: множитель может отражать паузу, частичное смягчение решения, предварительное согласование или другой механизм, уменьшающий амплитуду очередного ответа.

Из-за перекрестной структуры действие управления проявляется через два шага. Подстановка второго уравнения (1) в первое дает:

$$v_{n+2} = \alpha u_{n+1} \beta z_n v_n. \quad (2a)$$

$$w_{n+2} = \beta z_{n+1} \alpha u_n w_n. \quad (2b)$$

При постоянных $u_n = u$ и $z_n = z$ обе подсистемы имеют общий двухшаговый множитель $q = \alpha\beta uz$. Поэтому при $q < 1$ приращения стремятся к нулю, при $q > 1$ возрастают, а $q = 1$ задает границу нейтральной динамики. Это условие является непосредственным развитием критерия неуправляемой модели [5, с. 11012–11013]. В терминах теории обратной связи управление уменьшает петлевой коэффициент усиления до значения ниже единицы [6, с. 228–232].

$$q = \alpha\beta uz < 1. \quad (3)$$

Распределение стабилизирующего воздействия

Предположим, что исходный коэффициент $q_0 = \alpha\beta$ превышает единицу. Для создания заданного запаса устойчивости ρ , где $0 < \rho < 1$, управляющие множители должны удовлетворять ограничению $uz \leq \rho/q_0$. Одно и то же произведение можно получить различными сочетаниями u и z , поэтому возникает задача распределения воздействия между сторонами.

Если критерием является минимизация наибольшей односторонней коррекции $\max(1 - u, 1 - z)$, оптимальным оказывается симметричное решение. Действительно, при фиксированном произведении uz наибольшее из двух уменьшений минимально, когда множители равны. Следовательно, сбалансированное управление определяется выражением:

$$u = z = \sqrt{\frac{\rho}{q_0}}. \quad (4)$$

Односторонняя стабилизация также возможна. Если $z = 1$, то требуется $u \leq \rho/q_0$. Однако вся коррекция сосредотачивается у одного участника. Например, при $\alpha = 1,10$, $\beta = 1,08$ и $\rho = 0,90$ исходный коэффициент равен $q_0 = 1,188$. Симметричное решение дает $u = z \approx 0,8704$, то есть уменьшение каждой реакции примерно на 12,96%. При одностороннем варианте требуется $u \leq 0,7576$, что соответствует коррекции не менее 24,24% одной стороны.

Полученный результат уточняет тезис о малом стабилизирующем шаге. Размер необходимого изменения определяется удаленностью исходной системы от границы $q_0 = 1$ и выбранным запасом ρ . При q_0 , лишь немного превышающем единицу, действительно достаточно небольшой коррекции. При большом q_0 символического воздействия может быть недостаточно, а симметричное распределение снижает максимальную нагрузку на отдельного участника.

Робастное и переменное управление

На практике коэффициенты α и β известны приближенно. Пусть они принадлежат интервалам $0 < \alpha \leq \alpha_{\max}$ и $0 < \beta \leq \beta_{\max}$. Тогда управление должно рассчитываться по наихудшему возможному усилению $q_{0,\max} = \alpha_{\max}\beta_{\max}$. Достаточное робастное условие имеет вид:

$$\alpha_{\max}\beta_{\max}uz \leq \rho < 1. \quad (5)$$

Такой выбор сохраняет устойчивость для всех параметров внутри заданных интервалов. Плата за робастность состоит в более сильной коррекции по сравнению с расчетом по средним значениям. Подход соответствует принципу проверки выводов при варьировании параметров, характерному для «мягких» математических моделей [7, с. 5–8].

Для переменных множителей недостаточно контролировать произведение $u_n z_n$ на одном и том же шаге, поскольку в уравнениях (2а)–(2б) участвуют соседние значения. Достаточно обеспечить одновременно $\alpha\beta u_{n+1}z_n \leq \rho$ и $\alpha\beta z_{n+1}u_n \leq \rho$ для всех n . Практически это означает, что несогласованное чередование мер может временно повысить двухшаговое усиление даже тогда, когда каждый участник периодически уменьшает свою реакцию. Поэтому последовательность управлений должна оцениваться как единый контур.

При неизвестных параметрах возможно адаптивное уточнение q_0 по наблюдаемым отношениям $|v_{n+2}/v_n|$ и $|w_{n+2}/w_n|$. Однако при малых приращениях такие оценки чувствительны к шуму. В настоящей работе

используется более простой переключаемый закон, который не идентифицирует α и β , а реагирует на наблюдаемую интенсивность процесса.

Переключаемый алгоритм с гистерезисом

Для оценки масштаба реакции введем показатель $S_n = v_n^2 + w_n^2$. Задаются две границы $H_1 < H_2$ и стабилизирующий множитель κ , удовлетворяющий условию $\alpha\beta\kappa^2 < 1$. Введем двоичный индикатор режима σ_n : при $S_n \geq H_2$ принимается $\sigma_n = 1$, при $S_n \leq H_1$ — $\sigma_n = 0$, а внутри интервала $H_1 < S_n < H_2$ сохраняется предыдущее значение σ_{n-1} . Управляющие множители задаются законом:

$$u_n = z_n = \kappa^{\sigma_n}, \quad \sigma_n \in \{0,1\}. \quad (6)$$

При $\sigma_n = 0$ управление отключено и $u_n = z_n = 1$; при $\sigma_n = 1$ устанавливается $u_n = z_n = \kappa$. Разнесение порогов образует гистерезис и предотвращает частое переключение при малых колебаниях около одной границы, что является стандартным приемом для гибридных и переключаемых систем [8, с. 1343–1348]. В отличие от постоянного управления такой алгоритм не гарантирует стремление приращений к нулю после каждого отключения. Его цель — удерживать интенсивность реакций в ограниченном диапазоне при периодическом применении корректирующего воздействия.

Если требуется асимптотическая стабилизация, управление после первого включения не должно полностью отключаться либо единичный режим должен сам удовлетворять условию $q_0 < 1$. Если же допустима ограниченная динамика, гистерезис позволяет сократить продолжительность активной коррекции. Это различие важно: устойчивость к нулю и удержание в заданной области являются разными задачами управления.

Численный эксперимент

Моделирование выполнено для $\alpha = 1,10$, $\beta = 1,08$, $v_1 = 2$ и $w_1 = 1$. Исходный коэффициент $q_0 = 1,188$ превышает единицу. Без управления

показатель S_n возрастает с 5 на первом шаге до 27,998 на одиннадцатом и до 156,783 на двадцать первом шаге. Тем самым подтверждается неустойчивость базовой системы.

При постоянном симметричном множителе $\kappa = 0,90$ двухшаговый коэффициент уменьшается до 0,96228. Показатель S_{21} составляет 2,317, то есть затухание происходит медленно. При $\kappa = 0,86$ коэффициент равен 0,87864, а S_{21} снижается до 0,376. Расчеты показывают, что выполнение неравенства $q < 1$ определяет сам факт стабилизации, тогда как величина запаса $1 - q$ существенно влияет на длительность переходного процесса.

Для переключаемого закона (6) использованы параметры $H_1 = 2$, $H_2 = 6$ и $\kappa = 0,86$. Верхняя граница впервые превышает на третьем шаге: $S_3 = 7,057$, после чего включается управление. К девятому шагу показатель уменьшается до 1,833 и управление отключается. Далее интенсивность снова медленно возрастает, а повторное включение происходит при $S_{16} = 6,057$. На горизонте 80 шагов S_n сохраняется в диапазоне примерно от 1,709 до 7,057; активный режим используется на 34 из 79 переходов.

Постоянное управление обеспечивает асимптотическое затухание, а гистерезисный закон формирует ограниченный цикл включений и отключений. Второй вариант сокращает продолжительность коррекции, но допускает повторный рост между включениями. Выбор зависит от цели: полного прекращения новых реакций или недопущения их неограниченного усиления.

Обсуждение и ограничения

Предложенная схема рассматривает управление как изменение коэффициентов реакции, а не как внешнее воздействие, непосредственно вычитаемое из уровней x_n и y_n . Такая постановка сохраняет причинный механизм исходной модели: каждая сторона продолжает реагировать на приращение мер оппонента, но амплитуда ответа регулируется. Она удобна для анализа, поскольку критерий стабилизации выражается одним произведением параметров.

Модель не учитывает запаздывания, насыщение, отраслевую структуру мер, коалиции и изменение шкалы оценки во времени. Управляющие множители не связаны с экономической стоимостью конкретных решений. Поэтому результаты следует понимать как правила поведения агрегированной системы, а не как расчет практической политики. Дальнейшее развитие требует совместного учета управления, задержек и случайных отклонений коэффициентов.

Заключение

Для дискретной модели санкций и контрсанкций получены условия параметрического управления устойчивостью. При постоянных множителях приращения затухают, если $\alpha\beta u z < 1$. Для заданного запаса устойчивости симметричное распределение $u = z$ минимизирует максимальную коррекцию, приходящуюся на одного участника, тогда как одностороннее управление требует более значительного изменения одной реакции.

Сформулировано робастное условие для интервально заданных коэффициентов и уточнено условие для переменной последовательности управлений. Предложенный гистерезисный алгоритм ограничивает интенсивность реакции без непрерывного применения коррекции. Численные результаты согласуются с аналитическими оценками и показывают, что параметры управления должны выбираться не только по условию $q < 1$, но и по требуемой скорости затухания либо допустимому диапазону ограниченной динамики.

Литература:

1. Dimirovski G. M., Dinibütүн A. T., Kile F., Neck R., Stahre J., Vlacic L. B. Control system approaches for sustainable development and instability management in the globalization age // Annual Reviews in Control. 2006. Vol. 30. No. 1. P. 103–115. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1367578806000101> .

2. Stapleton L., Kopacek P. IFAC TC 9.5 SWIIS: Control Engineering and International Stability, an Essential Agenda for IFAC // IFAC Proceedings Volumes. 2011. Vol. 44. No. 1. P. 3124–3129. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016440917>.
3. Groumpos P. P. Using Fuzzy Cognitive Maps in Analyzing and Studying International Economic and Political Stability // IFAC-PapersOnLine. 2019. Vol. 52. No. 25. P. 23–28. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896319323481>.
4. Fradkov A. L. A cybernetic view on international stability under multiple sanctions and counter-sanctions // Cybernetics and Physics. 2022. Vol. 11. No. 3. P. 165–168. URL: <https://lib.physcon.ru/doc?id=007581c807ee>.
5. Fradkov A. L. International Stability under Iterated Sanctions and Counter-sanctions // IFAC-PapersOnLine. 2023. Vol. 56. No. 2. P. 11010–11014. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896323011771>.
6. Zames G. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems. Part I: Conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity // IEEE Transactions on Automatic Control. 1966. Vol. 11. No. 2. P. 228–238. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/1098316/>.
7. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. 5-е изд., стереотип. М.: МЦНМО, 2018. 32 с. URL: <https://biblio.mccme.ru/node/6179>.
8. Morse A. S., Mayne D. Q., Goodwin G. C. Applications of hysteresis switching in parameter adaptive control // IEEE Transactions on Automatic Control. 1992. Vol. 37. No. 9. P. 1343–1354. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/159571/>.