

Егоров Валерий Александрович

*студент магистратуры, Арзамасский политехнический институт
(филиал) Нижегородского государственного технического университета им.*

Р. Е. Алексеева, Россия, г. Арзамас

СРАВНЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО И СТОХАСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ САНКЦИОННОГО ПРОТИВОСТОЯНИЯ

Аннотация: В статье сопоставлены детерминированный и стохастический подходы к моделированию повторяющихся санкций и контрсанкций. Для детерминированной системы рассмотрен спектральный критерий устойчивости. Для модели со случайными коэффициентами получены отдельные условия устойчивости среднего и второго момента, а для аддитивных возмущений выведены стационарные дисперсии. Показано, что совпадение средних траекторий не гарантирует ограниченности разброса реализаций. Получена аналитическая граница допустимой интенсивности симметричного мультипликативного шума. Вычислительное сравнение выявило режимы, в которых детерминированный прогноз указывает на затухание, а среднеквадратическая динамика является неустойчивой.

Ключевые слова: детерминированная модель, стохастическая модель, санкционное взаимодействие, среднеквадратическая устойчивость, случайные возмущения, дискретная система, математическое моделирование, вычислительный эксперимент.

Abstract: The paper compares deterministic and stochastic approaches to modeling repeated sanctions and counter-sanctions. A spectral stability criterion is considered for the deterministic system. Separate conditions for mean and second-moment stability are obtained for a model with random coefficients, while stationary variances are derived for additive disturbances. It is shown that coincident mean trajectories do not guarantee bounded dispersion of realizations. An analytical boundary for admissible symmetric multiplicative noise intensity is obtained. Computational comparison identifies regimes in which the deterministic forecast predicts decay whereas the mean-square dynamics is unstable.

Keywords: deterministic model, stochastic model, sanctions interaction, mean-square stability, random disturbances, discrete system, mathematical modeling, computational experiment.

Введение

Детерминированная модель задает единственную траекторию при фиксированных начальных условиях и параметрах. Она удобна для аналитического исследования и позволяет непосредственно связать режим системы с коэффициентами взаимной реакции. Концепция «жестких» и «мягких» математических моделей требует проверять, сохраняются ли качественные выводы при изменении исходных предпосылок и введении неопределенности [1, с. 14–17]. Однако интенсивность санкционного ответа формируется под влиянием изменяющейся политической позиции, состояния экономики, информационного фона и ошибок оценки действий противоположной стороны. Поэтому одинаковые исходные условия не всегда приводят к одной последовательности решений.

Переход к стохастическому описанию меняет постановку вопроса об устойчивости. Для детерминированной системы исследуется стремление состояния к равновесию. В случайной системе можно отдельно рассматривать математическое ожидание, второй момент, дисперсию и вероятность выхода из допустимой области. Эти характеристики не эквивалентны [2, с. 57–63; 3, с. 795–800].

Исходная дискретная модель повторяющихся санкций рассматривается как развитие идей Осипова–Ланчестера применительно к последовательным взаимным реакциям [4, с. 59–74; 5, с. 11010–11012]. Современные варианты моделей конфликтов позволяют выделить коэффициенты эффективности, учесть научение и определить границы режимов [6, с. 137–143; 7, с. 278–283]. Цель работы — установить, в каких случаях детерминированный и стохастический прогнозы согласуются, а в каких дают принципиально разные оценки риска.

Результаты исследования

Детерминированная постановка

Пусть u_k и v_k обозначают приращения санкционного воздействия двух сторон на шаге k . Линейная модель взаимной реакции имеет вид

$$u_{k+1} = \alpha v_k, \quad v_{k+1} = \beta u_k, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1)$$

В векторной форме

$$\mathbf{z}_{k+1} = A\mathbf{z}_k, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(A) = \sqrt{\alpha\beta}. \quad (2)$$

Матрица удовлетворяет равенству $A^2 = qI$, где $q = \alpha\beta$. Поэтому асимптотическая устойчивость определяется условием

$$q = \alpha\beta < 1. \quad (3)$$

При $q < 1$ четные подпоследовательности изменяются по закону $u_{2j} = q^j u_0$, $v_{2j} = q^j v_0$. При $q > 1$ приращения возрастают, а при $q = 1$ сохраняют постоянный масштаб. Детерминированная модель дает прозрачную границу режимов, но предполагает, что коэффициенты реакции известны точно и не меняются во времени.

Модель со случайными коэффициентами

Непостоянство интенсивности ответа можно представить мультипликативным возмущением:

$$u_{k+1} = (\alpha + \sigma_\alpha \xi_k) v_k, \quad v_{k+1} = (\beta + \sigma_\beta \eta_k) u_k. \quad (4)$$

Случайные величины ξ_k и η_k считаются независимыми от предыдущих состояний, центрированными и нормированными:

$$E\xi_k = E\eta_k = 0, \quad E\xi_k^2 = E\eta_k^2 = 1. \quad (5)$$

Из центрированности шумов следует, что математические ожидания подчиняются исходной детерминированной системе:

$$Eu_{k+1} = \alpha Ev_k, \quad Ev_{k+1} = \beta Eu_k. \quad (6)$$

Следовательно, условие $q < 1$ гарантирует затухание среднего. Если сравнивать только средние траектории, стохастическая и детерминированная модели выглядят одинаково. Различие обнаруживается при анализе второго момента. Обозначим $M_k^u = Eu_k^2$, $M_k^v = Ev_k^2$. Тогда

$$M_{k+1}^u = (\alpha^2 + \sigma_\alpha^2)M_k^v, \quad M_{k+1}^v = (\beta^2 + \sigma_\beta^2)M_k^u. \quad (7)$$

Через два шага каждая компонента умножается на

$$Q = (\alpha^2 + \sigma_\alpha^2)(\beta^2 + \sigma_\beta^2), \quad Q < 1. \quad (8)$$

Неравенство в (8) является условием устойчивости в среднем квадратичном. Оно строже детерминированного, поскольку

$$Q - q^2 = \alpha^2\sigma_\beta^2 + \beta^2\sigma_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2 \geq 0. \quad (9)$$

Таким образом, среднеквадратическая устойчивость влечет $q < 1$, но обратное утверждение неверно. Возможен режим, в котором $Ez_k \rightarrow 0$, тогда как $E \|z_k\|^2$ возрастает. Средняя реакция выглядит сдержанной, однако совокупность возможных траекторий становится менее предсказуемой.

Граница допустимого шума

Для симметричных шумов $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma$ граница устойчивости задается уравнением $(\alpha^2 + \sigma^2)(\beta^2 + \sigma^2) = 1$. Решение относительно интенсивности шума имеет вид

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{-(\alpha^2 + \beta^2) + \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4}}{2}}. \quad (10)$$

Для $\alpha = 0,7$, $\beta = 0,8$ получаем $q = 0,56$ и $\sigma_{cr} \approx 0,662$. Для $\alpha = 0,9$, $\beta = 0,95$ произведение равно 0,855, а критическая интенсивность уменьшается примерно до 0,381. При приближении коэффициентов к детерминированной границе допустимый шум быстро сокращается.

Асимметричная неопределенность также влияет на обе стороны. Если $\sigma_\alpha > 0$, а $\sigma_\beta = 0$, условие принимает вид $(\alpha^2 + \sigma_\alpha^2)\beta^2 < 1$. Через два шага случайный множитель воздействует на исходное приращение каждой компоненты. Поэтому отсутствие собственного шума у второй стороны не изолирует ее от разброса общей динамики.

Аддитивные возмущения

Мультипликативная модель описывает изменчивость коэффициентов реакции. Если коэффициенты заданы, но на каждом шаге действуют внешние факторы, используется аддитивная постановка:

$$\mathbf{z}_{k+1} = A\mathbf{z}_k + \mathbf{w}_k, \quad P_{k+1} = AP_kA^\top + D. \quad (11)$$

Здесь $E\mathbf{w}_k = 0$, D — ковариация возмущения, а P_k — ковариация состояния. Средняя траектория вновь совпадает с детерминированной. Если $q < 1$ и $D = \text{diag}(d_u, d_v)$, существует стационарная ковариация с диагональными элементами

$$p_{11}^* = \frac{d_u + \alpha^2 d_v}{1 - q^2}, \quad p_{22}^* = \frac{d_v + \beta^2 d_u}{1 - q^2}. \quad (12)$$

В отличие от детерминированного решения, случайное состояние не стремится к нулю в каждой реализации. Оно колеблется около равновесия, а средний квадрат выходит на постоянный уровень. При $\alpha = \beta = 0,9$ и $d_u = d_v = 0,01$ детерминированные приращения затухают, но стационарные дисперсии обеих компонент составляют примерно 0,0526. Чем ближе q к единице, тем сильнее внешнее возмущение усиливается знаменателем $1 - q^2$.

Сопоставление результатов

Детерминированный критерий отвечает на вопрос, затухает ли номинальная реакция при неизменных коэффициентах. Мультипликативный стохастический критерий показывает, ограничен ли разброс при случайном изменении коэффициентов. Аддитивная модель оценивает остаточную вариативность, создаваемую внешними воздействиями при устойчивой внутренней динамике.

Рассмотрим $\alpha = 0,7$, $\beta = 0,8$. Тогда $q = 0,56$, и среднее затухает. При $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0,2$ получаем $Q = 0,3604 < 1$: детерминированный и стохастический выводы согласуются. Если интенсивность увеличить до $0,7$, то $Q = 1,1074 > 1$. Средняя траектория по-прежнему затухает с множителем q , но второй момент растет.

В последнем режиме отдельные реализации могут содержать длительные участки уменьшения и редкие сильные выбросы. Поэтому визуальная проверка нескольких траекторий не заменяет расчет критерия (8). В теории случайных дискретных систем необходимо различать устойчивость среднего, устойчивость в вероятности и устойчивость моментов [3, с. 800–806; 8, с. 4646–4649].

Для практического анализа целесообразна последовательная схема. Сначала рассчитывается номинальный параметр q . Затем по оценкам дисперсий коэффициентов определяется Q . После этого исследуются внешние аддитивные воздействия и стационарная ковариация. Такая процедура сохраняет простоту базовой модели и одновременно предотвращает применение детерминированного вывода за пределами его обоснованности.

Вычислительный эксперимент

Для одинаковых начальных условий были рассчитаны детерминированные траектории и ансамбли случайных реализаций. При $\alpha = 0,7$, $\beta = 0,8$, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0,2$ через двадцать шагов теоретический множитель четной подпоследовательности среднего равен $q^{10} \approx 0,00303$, а множитель второго момента — $Q^{10} \approx 3,70 \cdot 10^{-5}$. Выборочные оценки согласовались с аналитическим расчетом.

При $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0,7$ рекуррентный расчет моментов показал двухшаговый множитель $1,1074$. При этом детерминированная траектория и среднее ансамбля продолжали затухать. Полученное расхождение

показывает, что номинальная модель может корректно описывать центр распределения, но недооценивать риск редких интенсивных реакций.

Для аддитивного шума выборочная ковариация сходилась к ненулевому пределу из формулы (12). Увеличение q при неизменной мощности возмущения приводило к росту стационарного разброса. Следовательно, даже без смены режима приближение к критической границе ухудшает точность прогноза.

Выбор типа модели

Детерминированное описание оправдано, если требуется определить базовую границу устойчивости, параметры известны с приемлемой точностью, а система находится далеко от $q = 1$. Оно дает компактные формулы и служит исходной точкой для анализа управления.

Стохастическая модель необходима, если реакции сторон существенно меняются между циклами, требуется оценить риск отклонения либо номинальные параметры близки к границе устойчивости. Мультипликативный шум применяется для изменчивости интенсивности ответа, аддитивный — для внешних воздействий, не зависящих от текущего приращения.

Случайное описание требует оценки дисперсий, корреляций и временной зависимости возмущений. Если эти характеристики назначены произвольно, усложнение модели не повышает достоверность. Поэтому стохастические параметры должны сопровождаться диапазонами и сценарным анализом. Детерминированная и стохастическая модели отвечают на разные вопросы: первая выявляет механизм обратной реакции, вторая оценивает его надежность при неопределенности.

Заключение

Проведено сравнение детерминированного и двух стохастических вариантов дискретной модели санкционного противостояния. Установлено, что средняя траектория системы со случайными центрированными

коэффициентами совпадает с детерминированной, но устойчивость среднего не гарантирует устойчивости второго момента.

Для мультипликативных возмущений получен коэффициент Q и показано, что критерий $Q < 1$ строже условия $\alpha\beta < 1$. Выведена формула критической интенсивности симметричного шума. Для аддитивных возмущений определены стационарные дисперсии, характеризующие ненулевой фон колебаний около равновесия.

Детерминированную модель целесообразно применять для первичной классификации режима. Стохастическая модель необходима для оценки разброса, вероятности опасных отклонений и надежности номинального прогноза. Дальнейшее развитие исследования может включать коррелированные шумы, нестационарные дисперсии и оценивание параметров по наблюдаемым данным.

Литература:

1. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. 5-е изд., стереотип. М.: МЦНМО, 2018. 32 с. URL: <https://biblio.mccme.ru/node/6179>.
2. Задорожний В. Г., Чеботарев А. С., Дикарев Е. Е. Стохастическая модель боевых действий Ланчестера // Математическое моделирование. 2021. Т. 33. № 5. С. 57–77. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/mm4287>.
3. Hosoe Y., Hagiwara T. On Second-Moment Stability of Discrete-Time Linear Systems With General Stochastic Dynamics // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. Vol. 67. No. 2. P. 795–809. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9351624/>.
4. Осипов М. П. Влияние численности сражающихся сторон на их потери. Ч. 1 // Военный сборник. 1915. № 6. С. 59–74. URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_013402690/.
5. Fradkov A. L. International Stability under Iterated Sanctions and Counter-sanctions // IFAC-PapersOnLine. 2023. Vol. 56. No. 2. P. 11010–11014. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896323011771>.

6. Новиков Д. А. Эффекты научения в моделях Осипова–Ланчестера // Управление большими системами. 2025. Вып. 116. С. 135–153. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ubs1303> .

7. Helmbold R. L. Osipov: The 'Russian Lanchester' // European Journal of Operational Research. 1993. Vol. 65. No. 2. P. 278–288. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037722179390341J> .

8. Vaidya U. Stochastic Stability Analysis of Discrete-Time System Using Lyapunov Measure // 2015 American Control Conference (ACC). Chicago, IL: IEEE, 2015. P. 4646–4651. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/7172061/> .