

Егоров Валерий Александрович

магистрант,

Арзамасский политехнический институт (филиал)

Нижегородского государственного технического

университета им. Р. Е. Алексеева,

г. Арзамас

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ САНКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ К ИЗМЕНЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ

Аннотация: В статье исследована чувствительность дискретной модели взаимных санкционных реакций к изменению коэффициентов сторон. Получены локальные и нормированные показатели чувствительности спектрального радиуса, запаса устойчивости и компонент траектории. Показано, что произведение коэффициентов определяет асимптотический режим, тогда как их соотношение влияет на переходное усиление. Выведена интервальная оценка допустимой неопределенности параметров и установлено резкое уменьшение робастного запаса при приближении к границе устойчивости. Вычислительные эксперименты подтверждают аналитические оценки скорости затухания и переходных пиков. Предложенный набор показателей разделяет долгосрочную и переходную чувствительность системы.

Ключевые слова: анализ чувствительности, дискретная модель, санкционное взаимодействие, устойчивость, спектральный радиус, неопределенность параметров, переходный процесс, математическое моделирование.

Abstract: The paper investigates the sensitivity of a discrete model of mutual sanctions responses to variations in the parties' reaction coefficients. Local and normalized sensitivity measures are obtained for the spectral radius, stability

margin, and trajectory components. The product of the coefficients determines the asymptotic regime, whereas their ratio governs transient amplification. An interval estimate of admissible parameter uncertainty is derived, showing a sharp loss of robust stability near the boundary. Computational experiments confirm the analytical estimates of decay time and transient peaks. The proposed set of indicators separates the long-term and transient sensitivity of the system.

Keywords: sensitivity analysis, discrete model, sanctions interaction, stability, spectral radius, parameter uncertainty, transient response, mathematical modeling.

Введение

Практическая ценность математической модели определяется не только возможностью рассчитать траекторию при одном наборе данных. Необходимо установить, сохраняются ли выводы при неточном задании параметров. Для санкционного взаимодействия это особенно важно: коэффициенты реакции не наблюдаются непосредственно, зависят от принятой шкалы и могут изменяться вместе с внешней обстановкой.

В анализе чувствительности различают локальные показатели, основанные на производных, и глобальные оценки, исследующие модель на множестве допустимых параметров [1, с. 16–21; 2, с. 112–116]. Производная характеризует малую окрестность номинальной точки, а интервальный подход позволяет проверить сохранение режима при конечной неопределенности [3, с. 3071–3075; 4, с. 1–18]. Для рассматриваемой дискретной системы основные показатели могут быть получены аналитически.

Исходная модель повторяющихся санкций и контрсанкций описывает перекрестную реакцию каждой стороны на приращение воздействия оппонента [5, с. 11011–11013]. Ее устойчивость определяется произведением двух коэффициентов, однако один критерий не показывает скорость затухания и возможные переходные пики. Цель статьи – оценить

чувствительность спектрального радиуса, запаса устойчивости, траектории и максимального кратковременного усиления к изменению параметров.

Результаты исследования

Постановка модели

Пусть x_n и y_n – уровни ограничительных мер двух сторон после n -го шага. Линейная модель имеет вид

$$x_{n+1} = x_n + \alpha(y_n - y_{n-1}), \quad y_{n+1} = y_n + \beta(x_n - x_{n-1}). \quad (1)$$

Здесь $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ – коэффициенты реакции. Для приращений $u_n = x_n - x_{n-1}$ и $v_n = y_n - y_{n-1}$ получаем

$$\mathbf{z}_{n+1} = A\mathbf{z}_n, \quad \mathbf{z}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Поскольку $A^2 = qI$, где $q = \alpha\beta$, собственные значения и спектральный радиус равны

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{q}, \quad \rho(A) = \sqrt{q}, \quad q = \alpha\beta. \quad (3)$$

Асимптотическая устойчивость эквивалентна условию $q < 1$. Для более полной характеристики введем запас устойчивости $m = 1 - q$, время N_ε , необходимое для уменьшения четных приращений до доли ε , и переходный коэффициент G . Такой набор отделяет долгосрочный режим от краткосрочной динамики и соответствует принципу проверки структурной устойчивости выводов [6, с. 20–25].

Локальная чувствительность

Производные и нормированные показатели для q и ρ имеют вид

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \beta, \quad \frac{\partial q}{\partial \beta} = \alpha, \quad E_q^\alpha = E_q^\beta = 1, \quad E_\rho^\alpha = E_\rho^\beta = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Следовательно, одинаковое относительное изменение любого коэффициента вызывает такое же относительное изменение произведения q и вдвое меньшее изменение спектрального радиуса. По отношению к асимптотической границе параметры симметричны. Ранжирование только по абсолютным производным было бы зависимо от масштаба.

Для запаса $m = 1 - q$ относительная чувствительность по модулю равна

$$\kappa_m^\alpha = \kappa_m^\beta = \frac{q}{1 - q}. \quad (5)$$

При $q = 0,36$ показатель составляет 0,5625, при $q = 0,81 - 4,2632$, а при $q = 0,99 - 99$. Поэтому вблизи критической границы малая ошибка параметра изменяет запас устойчивости на величину, сопоставимую с самим запасом. Номинально устойчивая система может оказаться практически неустойчивой к погрешности идентификации.

Чувствительность траектории и скорости затухания

Явное решение следует из равенства $A^2 = qI$:

$$u_{2k} = q^k u_0, \quad v_{2k} = q^k v_0, \quad u_{2k+1} = \alpha q^k v_0, \quad v_{2k+1} = \beta q^k u_0. \quad (6)$$

В четные моменты параметры входят только через q , а в нечетные дополнительно проявляется коэффициент конкретной стороны. Относительная чувствительность четных компонент по каждому параметру равна k ; для нечетной компоненты по собственному коэффициенту она равна $k + 1$. Таким образом, относительная ошибка накапливается с горизонтом прогноза, хотя сама устойчивая траектория затухает.

Для условия $q^k \leq \varepsilon$ минимальное число шагов оценивается формулой

$$N_\varepsilon = 2 \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln q} \right\rceil, \quad 0 < q < 1. \quad (7)$$

При $\varepsilon = 0,05$ значения $q = 0,36, 0,64, 0,81$ и $0,99$ дают соответственно 6, 14, 30 и примерно 598 шагов. Все режимы устойчивы, но время стабилизации различается на два порядка. При $q \rightarrow 1 - 0$ производная непрерывной оценки N_ε пропорциональна $1/[q(\ln q)^2]$ и неограниченно возрастает. Поэтому длительность затухания является более чувствительным индикатором критического режима, чем небольшое изменение $\rho(A)$.

Асимметрия и переходное усиление

Одинаковое произведение q не означает одинакового переходного процесса. Для евклидовой нормы

$$\|A\|_2 = \max\{\alpha, \beta\}, \quad \|A^{2k}\|_2 = q^k, \quad \|A^{2k+1}\|_2 = q^k \max\{\alpha, \beta\}, \quad G = \max\{1, \alpha, \beta\}. \quad (8)$$

Система может быть асимптотически устойчивой, но усиливать отдельное воздействие на первом шаге. Сравним два набора с $q = 0,8$. При $\alpha = \beta = \sqrt{0,8} \approx 0,8944$ норма уменьшается сразу. При $\alpha = 1,6$, $\beta = 0,5$ и $\mathbf{z}_0 = (0,1)^T$ последовательность норм начинается значениями 1; 1,6; 0,8; 1,28; 0,64. Предельная скорость одинакова, но первый ответ во втором случае возрастает на 60 процентов.

Следовательно, q достаточен для долгосрочной классификации, но не для оценки переходной безопасности. Отношение α/β определяет направленность пика. В содержательной интерпретации одна сторона может реагировать резко, а другая слабо: взаимный процесс затухает, однако отдельный пакет ограничений временно усиливается. Анализ изменяющихся коэффициентов также используется в расширениях моделей Осипова–Ланчестера [7, с. 139–143].

Интервальная робастность

Пусть номинальные значения равны α_0 , β_0 , а относительные неопределенности ограничены величинами η_α , η_β . Для положительных параметров наибольшее произведение достигается в верхних концах интервалов. Поэтому

$$q_0(1 + \eta_\alpha)(1 + \eta_\beta) < 1, \quad q_0 = \alpha_0\beta_0; \quad \eta < \eta_{cr} = \frac{1}{\sqrt{q_0}} - 1 \quad \text{при } \eta_\alpha = \eta_\beta = \eta. \quad (9)$$

Для $q_0 = 0,36$ совместное увеличение каждого коэффициента может достигать примерно 66,67 процента. При $q_0 = 0,81$ допустимый уровень снижается до 11,11 процента, при $q_0 = 0,95$ – до 2,60 процента, а при $q_0 = 0,99$ – до 0,50 процента. Последний режим формально устойчив, но почти не имеет робастного запаса.

Формула (5) описывает скорость изменения запаса около одной точки, а условие (9) гарантирует устойчивость на всем прямоугольном множестве параметров. При двух коэффициентах аналитический результат предпочтительнее многократного перебора. Для нелинейных и многопараметрических расширений могут применяться глобальные показатели Соболя и дисперсионные схемы [1, с. 21–27; 8, с. 259–264].

Вычислительный эксперимент

Аналитические оценки проверены прямым расчетом траекторий. Для $\alpha = \beta = 0,6$ получены $q = 0,36$, $\rho = 0,6$ и снижение четной подпоследовательности ниже пяти процентов за шесть шагов. Для $\alpha = \beta = 0,9$ увеличение α на один процент изменило q также на один процент, а ρ – приблизительно на 0,5 процента, что соответствует формуле (4).

При $q_0 = 0,99$ одновременное увеличение обоих коэффициентов на 0,5 процента дает произведение около 0,999925. Увеличение примерно на 0,51 процента переводит его через единицу. Расчет подтверждает критическую величину из формулы (9) и показывает, что округление параметров может скрыть смену режима.

Для асимметричной пары $\alpha = 1,6$, $\beta = 0,5$ прямое вычисление степеней матрицы подтвердило переходный пик $G = 1,6$. Центральные разности с шагом 10^{-4} воспроизвели производные формулы (4) с относительным расхождением менее 10^{-7} . При этом локальная проверка не выявляет пересечение границы на конечном интервале, что подтверждает необходимость совместного использования производных и робастной оценки.

Интерпретация для настройки параметров

Полученные оценки позволяют различать две задачи регулирования. Если требуется увеличить долгосрочный запас устойчивости, необходимо уменьшать произведение q . При одинаковом относительном снижении любой коэффициент дает одинаковый эффект. При одинаковом абсолютном снижении сильнее действует изменение того параметра, напротив которого в

производной стоит больший коэффициент. Поэтому при $\alpha > \beta$ уменьшение β быстрее снижает q , поскольку $\partial q / \partial \beta = \alpha$.

Для подавления переходного пика стратегия иная. Если α является наибольшим коэффициентом, уменьшение только β улучшает асимптотический режим, но не меняет $G = \alpha$. Одновременное снижение q и максимального пика требует воздействия на больший коэффициент. Следовательно, выбор корректируемого параметра зависит от целевого показателя: запас устойчивости и переходная амплитуда могут требовать разных решений.

При идентификации модели целесообразно представлять не только точечные оценки α и β , но и интервалы их возможных значений. Если верхняя граница произведения превышает единицу, вывод об устойчивости нельзя считать робастным. Дополнительно следует сообщать отношение коэффициентов, поскольку оно характеризует асимметрию ответов и помогает определить направление наиболее вероятного переходного усиления.

Заключение

Параметры α и β равноправны по относительному влиянию на асимптотическую границу. Однако выбранный выход меняет интерпретацию: запас устойчивости и время затухания существенно чувствительнее спектрального радиуса, а переходный пик зависит не от произведения, а от наибольшего отдельного коэффициента. Поэтому оценка только по условию $\alpha\beta < 1$ является неполной.

Получена интервальная граница, показывающая быстрое исчезновение робастного запаса при $q_0 \rightarrow 1 - 0$. Номинальная устойчивость при $q_0 = 0,99$ сохраняется лишь при погрешности коэффициентов порядка долей процента. Надежными следует считать выводы, выдерживающие допустимое изменение параметров, что соответствует концепции мягкого моделирования [6, с. 23–26].

Результаты позволяют рекомендовать четыре совместных показателя: произведение q для долгосрочного режима, запас $1 - q$ для близости к границе, время N_ε для длительности перехода и G для максимального кратковременного усиления. Ограничением исследования является постоянство положительных коэффициентов и отсутствие дополнительных задержек. Полученные формулы могут служить базой для анализа нелинейных, стохастических и управляемых моделей санкционного взаимодействия.

Литература:

1. Сальтелли А., Соболев И.М. Анализ чувствительности нелинейных математических моделей: численные опыты // Математическое моделирование. 1995. Т. 7. № 11. С. 16–28. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/mm1810>.
2. Соболев И.М. Об оценке чувствительности нелинейных математических моделей // Математическое моделирование. 1990. Т. 2. № 1. С. 112–118. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/mm2320>.
3. Razavi S., Gupta H.V. What Do We Mean by Sensitivity Analysis? The Need for Comprehensive Characterization of “Global” Sensitivity in Earth and Environmental Systems Models // Water Resources Research. 2015. Vol. 51. No. 5. P. 3070–3092. URL: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/2014WR016527>.
4. Saltelli A., Ratto M., Andres T., Campolongo F., Cariboni J., Gatelli D., Saisana M., Tarantola S. Global Sensitivity Analysis: The Primer. Chichester: John Wiley & Sons, 2008. 304 p. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9780470725184>.
5. Fradkov A.L. International Stability under Iterated Sanctions and Counter-sanctions // IFAC-PapersOnLine. 2023. Vol. 56. No. 2. P. 11010–11014. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896323011771>.
6. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. 5-е изд., стер. М.: МЦНМО, 2018. 32 с. URL: <https://biblio.mccme.ru/node/6179>.

7. Новиков Д.А. Эффекты научения в моделях Осипова–Ланчестера // Управление большими системами. 2025. Вып. 116. С. 135–153. URL: https://ubs.mtas.ru/search/search_results_ubs_new.php?IBLOCK_ID=20&publication_id=23344.

8. Saltelli A., Annoni P., Azzini I., Campolongo F., Ratto M., Tarantola S. Variance Based Sensitivity Analysis of Model Output: Design and Estimator for the Total Sensitivity Index // Computer Physics Communications. 2010. Vol. 181. No. 2. P. 259–270. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465509003087>.